STERE IANUȘ

NICOLAE SOARE
LILIANA NICULESCU

SORIN DRAGOMIR
MARCEL ȚENA

PROBLEME DE GEOMETRIE ȘI DE TRIGONOMETRIE

PENTRU CLASELE IX-X

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
București — 1983

Scanned with OKEN Scanner

Lector dr. S. IANUȘ

Asistent N. SOARE
Prof. L. NICULESCU

Prof. S. DRAGOMIR
Prof. M. ȚENA

PROBLEME DE GEOMETRIE ȘI DE TRIGONOMETRIE

PENTRU CLASELE IX-X

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

Referenți: Prof. univ. dr. DAN PAPUC
Colectivul catedrei de matematică
de la liceul industrial 26, București

NOTĂ

Lucrarea a fost elaborată pe baza noilor programe de matematică și își propune să răspundă preocupărilor de reînnoire a învățământului geometriei în clasele a IX-a și a X-a. Problemele și exercițiile propuse au fost grupate în capitole corespunzătoare celor din manualele de geometrie și trigonometrie pentru clasele IX-X, acoperind întreaga programă, iar în cadrul fiecărui capitol a fost respectată, pe cît a fost posibil, gradarea din punct de vedere al dificultății de rezolvare.

Culegerea conține probleme clasice, probleme de largă circulație, culese din reviste sau alte lucrări de specialitate din țara noastră sau din străinătate. Menționăm că majoritatea problemelor au fost reformulate în spiritul manualelor noi și că unele dintre ele aparțin autorilor.

În capitolele II, III, XI, XII s-au introdus, sub formă de probleme, succinte expuneri teoretice despre transformările geometrice, menite să ajute pe rezolvitori și, în același timp, să le completeze cunoștințele. Avînd în vedere limitarea spațiului afectat, ne-am mărginit la un material minimal care să ilustreze problematica variată a geometriei elementare. Cititorii care doresc să-și completeze cunoștințele de geometrie elementară pot găsi în bibliografia indicată noi puncte de vedere și multe alte probleme.

În partea a doua a lucrării se dau soluții, indicații sau răspunsuri la probleme. S-au dat indicații sau soluții amănunțite pentru problemele mai dificile.

Autorii mulțumesc referenților, tuturor celor cu care au purtat discuții utile pe marginea lucrării și sînt bucuroși să primească sugestiile și criticile cititorilor, care să contribuie la îmbunătățirea unei ediții viitoare.

Autorii

Redactor: Prof. VALENTIN RADU
Tehnoredactor: GAȘPAR PARASCHIVA
Coperta: NICOLAE SÎRBU

Scanned with OKEN Scanner

Notaţiile utilizate

$\mathcal{P}$ = planul;
AB = dreapta determinată de punctele A şi B;
$|AB|$ = segmentul deschis de capete A şi B;
$[AB]$ = segmentul închis de capete A şi B;
$|AB$ = semidreapta deschisă cu originea A, care conţine punctul B;
$[AB$ = semidreapta închisă cu originea A, care conţine punctul B;
$\|AB\|$ = lungimea segmentului $|AB|$ (sau $[AB]$);
m = funcţia-măsură unghiulară cu valori exprimate în grade; μ = funcţia-măsură unghiulară cu valori exprimate în radiani;
ABC = triunghiul cu vîrfurile A, B, C;
$\hat{hk}$ = unghiul avînd ca laturi semidreptele h şi k;
$\widehat{AOB}$ = unghiul avînd ca laturi semidreptele $[OA$ şi $[OB$;
Int = interior; Ext = exterior;
$|dA$ = semiplanul deschis limitat de dreapta d, care conţine punctul A;
$[dA$ = semiplanul închis limitat de dreapta d, care conţine punctul A;
$d(O, a)$ = distanţa de la punctul O la dreapta a;
$d(O, AB)$ = distanţa de la punctul O la dreapta AB;
$A_1A_2...A_n$ = poligonul cu vîrfurile A_1, A_2, ..., A_n;
$[A_1A_2...A_n]$ = suprafaţa poligonală asociată poligonului $A_1A_2...A_n$;
$\mathcal{C}(O, r)$ = cercul de centru O şi rază r;
$\overline{\mathcal{C}(O, r)}$ sau $[\mathcal{C}(O, r)]$ = discul de centru O şi rază r;
σ = funcţia-arie;
$|\alpha A$ = semispaţiul deschis limitat de planul α, care conţine punctul A;
$[\alpha A$ = semispaţiul închis limitat de planul α, care conţine punctul A;

Scanned with OKEN Scanner

(ABC) = planul determinat de punctele A, B și C;

$\hat{\alpha\beta}$ = unghiul diedru ale cărei fețe sînt semiplanele α și β;

$\widehat{abc}$ = unghiul triedru avînd ca muchii semidreptele a, b, c;

$[\widehat{OABC}]$ = unghiul triedru avînd ca muchii semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$;

$[ABCD]$ = tetraedrul cu vîrfurile A, B, C, D;

$[A_1A_2...A_n]$ = poliedrul cu vîrfurile A_1, A_2, ..., A_n;

$[VA_1A_2...A_n]$ = piramida cu vîrful V și bază suprafața poligonală $[A_1A_2...A_n]$;

$\mathcal{S}(O, r)$ = sfera de centru O și rază r;

$[\mathcal{S}(O, r)]$ = corpul sferic (bila) de centru O și rază r;

v = funcția-volum;

$\equiv$ = relația de congruență;

$\parallel$ = relația de paralelism;

$\perp$ = relația de perpendicularitate;

$\sim$ = relația de asemănare;

pr = proiecție ortogonală.

Scanned with OKEN Scanner

Partea întîi

ENUNȚURI

Capitolul I

PROBLEME DE INCIDENȚĂ, ORDONARE ȘI CONGRUENȚĂ ÎN PLAN

1. Să se arate că există cel puțin trei drepte distincte într-un plan.

2. Fie P un punct în plan. Există cel puțin o dreaptă din plan care nu trece prin P.

3. Orice punct din plan se află pe cel puțin o dreaptă a planului.

4. Orice punct al planului se află pe cel puțin două drepte distincte din plan.

5. Să se arate că mulțimea tuturor punctelor situate pe dreptele unui plan este egală cu întregul plan.

6. Considerăm punctele A, B, C, D, E în plan, astfel că oricare trei sînt coliniare. Demonstrați că cele cinci puncte considerate sînt coliniare. Aceeași problemă pentru 6 puncte.

7. Se consideră în plan două drepte distincte d_1 și d_2, m puncte pe dreapta d_1 și n puncte pe dreapta d_2 care sînt distincte de cele considerate pe d_1. Unind cele $m + n$ puncte, două cîte două, în toate modurile posibile, cîte drepte se obțin?

8. $\mathcal{P}$ fiind un plan se notează $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ și $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ mulțimea dreptelor din $\mathcal{P}$. Să se definească o funcție pe mulțimea $\mathcal{P}^2 \setminus \Delta$ cu valori în $\mathcal{D}(\mathcal{P})$, unde $\Delta = \{(A, A) \mid A \in \mathcal{P}\}$.

9. Să se arate că există o aplicație:

$$h : \mathcal{D}(\mathcal{P}) \to \text{Sub } (\mathcal{P})$$

cu următoarele proprietăți:

1) $h(d) \neq \varnothing$, pentru orice $d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$.

2). $\bigcup_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})} h(d) = \mathcal{P}$.

3) Dacă $\mathcal{M}$ este imaginea lui h, adică:

$$\mathcal{M} = \{h(d) \mid d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})\},$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci pentru orice $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$, există și este unic determinat un element $t \in \mathcal{M}$ astfel încît:

$$\{A, B\} \subseteq t.$$

4) Pentru orice $t \in \mathcal{M}$, există două puncte distincte A, B astfel încît: $\{A, B\} \subseteq t$.

Am notat cu $\mathrm{Sub}(\mathcal{P})$ mulțimea părților planului $\mathcal{P}$.

10. Oricare ar fi punctele A, B, C pe o dreaptă d, avem

$$\| AB \| \geqslant | \| AC \| - \| CB \| |.$$

11. Dați exemplu de trei puncte coliniare A, B, C, precizîndu-le abscisele într-un sistem de coordonate, pentru care avem:

1) $\| AB \| = \| AC \| + \| CB \|$;
2) $\| AB \| < \| AC \| + \| CB \|$.

12. Demonstrați că oricare ar fi patru puncte A, B, C, D pe o dreaptă, avem:

$$\| AB \| \leqslant \| AC \| + \| CD \| + \| DB \|.$$

13. Fie A și B două puncte avînd într-un sistem de coordonate pe dreapta AB abscisele a și b. Care este abscisa unui punct C situat pe dreapta AB, distinct de B, știind că $\| AB \| = \| AC \|$?

14. Fie trei puncte distincte A, B și M pe o dreaptă d astfel că $\| AM \| = \| MB \|$. Să se arate că în orice sistem de coordonate pe d, abscisa lui M este media aritmetică a absciselor punctelor A și B.

15. Fie o dreaptă d în planul $\mathcal{P}$ și două puncte distincte A, B pe d. Să se arate că există funcțiile $\delta_{AB} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to [0, \infty)$ și $g : d \to \mathbf{R}$ care satisfac următoarele proprietăți:

1) $\delta_{AB}(P, Q) = \delta_{AB}(Q, P), \quad (\forall) P, Q \in \mathcal{P}$.
2) $\delta_{AB}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
3) $\delta_{AB}(P, R) \leqslant \delta_{AB}(P, Q) + \delta_{AB}(Q, R), (\forall) P, Q, R \in \mathcal{P}$.
4) $g(A) = 0, g(B) = 1$.
5) $| g(P) - g(Q) | = \delta_{AB}(P, Q), \quad (\forall) P, Q \in \mathcal{P}$.
6) g este bijectivă.

16. Pe o dreaptă d se consideră patru puncte distincte A, B, C, D și sistemele de coordonate $f : d \to \mathbf{R}$, $g : d \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(A) = 0, f(B) > 0$, $g(C) = 0, g(D) > 0$.

Se notează $x_P = f(P)$ și $y_P = g(P)$. Să se arate că:

1) Aplicația $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $\varphi = g \circ f^{-1}$ este o bijecție și avem $\varphi(0) = y_A$, $\varphi(x_C) = 0$, $\varphi(x_P) = y_P$, $(\forall) P \in d$.

2) Avem $y_D = | x_D - x_C |$, $x_B = | y_B - y_A |$ și în general $| y_Q - y_P | = | x_Q - x_P |$ pentru orice puncte $P, Q \in d$.

3) Aplicația $\psi : d \to d$ definită prin $\psi = g^{-1} \circ f$ este o bijecție.

4) Pentru orice punct P de pe dreapta d avem $\varphi(f(\psi(P))) = f(P)$, $\varphi(g(\psi(P))) = g(P)$.

17. Fie $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ patru numere reale strict pozitive care satisfac relația:

$$\frac{\beta + \mu}{\alpha + \lambda} \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie d o dreaptă și $A,\ B \in d$ două puncte cu coordonatele: $x_A = \lambda,\ x_B = \mu$. Să se determine poziția punctelor $M,\ N \in d$ astfel încît să avem:

$$\| AM \| = \alpha,\ \| MN \| = \beta,\ \| NB \| = \gamma,$$

unde: $\gamma = \beta + \mu - (\alpha + \lambda)$. Discuție.

18. Folosind axioma riglei să se determine minimul funcției $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$, unde $a < b < c < d$ sînt numere reale.

19. Punctele $A,\ B,\ C$ au coordonatele $a,\ b,\ \frac{a+b}{2}$.

Demonstrați că $C \in |AB|$.

20. Fie $A,\ B,\ C$ trei puncte astfel încît B este între A și C. Dacă M este între A și B, iar N este între B și C, atunci B este între M și N.

21. Fie $A,\ B,\ C$ trei puncte astfel încît $B \in |AC|$. Demonstrați că:

1) $|AB| \cap |BC| = \varnothing$;
2) $[AB] \cap [BC] = \{B\}$;
3) $|AB| \cup |BC| = |AC| - \{B\}$.

22. Fie d o dreaptă și $O \in d$. Să se arate că pe mulțimea $d - \{O\}$ relația

$$A \mathcal{R}_O B \overset{def.}{\Leftrightarrow} \text{„}O \text{ nu este între } A \text{ și } B\text{“},$$

este relație de echivalență. Să se determine clasele de echivalență.

23. Fie $A,\ B,\ C,\ D$ patru puncte distincte coliniare. Presupunînd că: $B \in |AC|$ și $C \in |AD|$, să se arate că: $C \in |BD|$ și $B \in |AD|$.

24. Fie d o dreaptă și A un punct situat pe d; fie $d^* = d \setminus \{A\}$ și $\mathcal{R}_A$ relația de echivalență definită ca în problema **22.** Să se arate că există două funcții:

$$\mathcal{E}, \mathcal{E}' : d \to \text{Sub } (d) \text{ cu proprietățile:}$$

1) $\mathcal{E}(A) \cup \mathcal{E}'(A) = d$;
2) Pentru orice două puncte $M,\ N \in d^*$, dacă $M \mathcal{R}_A N$ atunci sau $\{M, N\} \subseteq \mathcal{E}(A)$, sau $\{M, N\} \subseteq \mathcal{E}'(A)$. (Am notat cu Sub (d) mulțimea părților mulțimii d.)

25. Pe semidreapta deschisă $|AB$ definim relația:

$$M \leqslant N \overset{def}{\Leftrightarrow} M \in [AN].$$

Să se arate că relația $\leqslant$ este reflexivă și tranzitivă.

26. Fie d o dreaptă și A un punct situat pe d. Fie $B,\ C$ două puncte distincte situate pe d astfel încît $A \in |BC|$.
Să considerăm relațiile:

$$M \leqslant N \overset{def}{\Leftrightarrow} M \in |AN|,\ M,\ N \in |AC.$$

$$M \geqslant N \overset{def}{\Leftrightarrow} N \in |AM|,\ M,\ N \in |AB.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definim pe întreg d o relație în modul următor:

1) Pentru orice $M, N \in |AC$:

$$M <_d N \overset{def}{\Leftrightarrow} M \leqslant N.$$

2) Pentru orice $M \in |AC$, $A <_d M$.
3) Pentru orice $M \in |AB$, $N \in |AC$, avem : $M <_d N$.
4) Pentru orice $M \in |AB : M <_d A$.
5) Pentru orice $M, N \in |AB$:

$$M <_d N \overset{def}{\Leftrightarrow} M \geqslant N.$$

Să se arate că relația $<_d$ pe d este totală și tranzitivă.

27. Fie d o dreaptă și $A, A' \in d$ două puncte arbitrare distincte ale ei. Să se arate că există două puncte $B, C \in d$, distincte, astfel încît: $\{A, A'\} \subseteq |BC|$.

28. Fie d o dreaptă, $A, A' \in d$ și $B, C \in d$, astfel încît $\{A, A'\} \subseteq BC$, $B \neq C$. Să notăm cu $<_d^A$ relația pe d construită ca în exercițiul **26**, asociată punctului A ca origine a semidreptelor opuse $|AB$ și $|AC$. Fie $<_d^{A'}$ relația pe d definită în mod analog, cu originea A' a semidreptelor deschise opuse $|A'B$ și $|A'C$. Să se arate că pentru orice $M, N \in d$:

$$M <_d^A N \Leftrightarrow M <_d^{A'} N.$$

29. Fie d o dreaptă și M, N, P trei puncte situate pe d. Să se arate că pentru orice sistem de coordonate pe d avem:

$$M <_d N <_d P \Leftrightarrow x_M \leqslant x_N \leqslant x_P \text{ sau } x_M \geqslant x_N \geqslant x_P.$$

30. Să se arate că, pentru orice dreaptă d, relația $<_d$ pe d (ca în exercițiul **26**) este antisimetrică.

31. Fie d o dreaptă fixată în planul $\mathcal{P}$. Să se arate că pe mulțimea $\mathcal{P} - d$ relația:

$A \mathcal{R}_d B \Leftrightarrow$ „A și B sînt de aceeași parte a dreptei d", este o relație de echivalență.

Să se determine clasele de echivalență.

32. Să se arate că nu există o dreaptă care să intersecteze toate laturile unui poligon cu 101 laturi și să nu treacă prin vîrfuri.

33. Fie linia poligonală cu trei vîrfuri: $L = [P_1P_2] \cup [P_2P_3]$. Știind că L este o mulțime convexă, să se arate că L este un segment.

34. Fie O un punct interior poligonului convex $A_1A_2...A_{1000}$. Numerotăm laturile acestui poligon cu numerele de la 1 la 1000. Independent de această numerotare numerotăm și segmentele $|OA_1|$, $|OA_2|$, ..., $|OA_{1000}|$.
Pot fi făcute numerotările astfel încît sumele numerelor asociate laturilor triunghiurilor A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_{1000}OA_1$ să fie egale?

35. Cîte laturi poate avea un poligon convex dacă toate diagonalele sale sînt congruente?

36. Un poligon convex cu n laturi este descompus de anumite diagonale ale sale în triunghiuri, astfel încît:

1) din fiecare vîrf pornesc diagonale în număr par;
2) orice două diagonale nu au puncte interioare comune.

Arătați că n se divide cu 3.

Scanned with OKEN Scanner

37. În plan se consideră $n \geq 3$ puncte astfel încît oricare trei nu sînt coliniare. Arătați că dintre toate liniile poligonale închise care au aceste puncte ca vîrfuri, linia poligonală închisă simplă are lungimea cea mai mică.

38. Să se arate că orice dreaptă care taie un poligon convex într-un punct interior unei laturi, fără a fi suportul unei laturi, trece prin interiorul poligonului.

39. Fie P un poligon convex. Să se arate că o dreaptă care trece prin interiorul său taie linia poligonală în exact două puncte.

40. Să se arate că există trei semidrepte $|OA$, $|OB$, $|OC$ cu aceeași origine O astfel încît:

1) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$.

2) Int $\widehat{AOB}$, Int $\widehat{BOC}$, Int $\widehat{COA}$ sînt două cîte două disjuncte.

41. Fie $|OA$, $|OB$, $|OC$, $|OD$ patru semidrepte distincte cu aceeași origine O, astfel încît:

1) $\mathrm{m}(\widehat{AOB}) = \mathrm{m}(\widehat{COD}) = x$.

2) Int $\widehat{AOB}$, Int $\widehat{BOC}$, Int $\widehat{COD}$ sînt două cîte două disjuncte.

Să se calculeze în funcție de numărul real x, $0 < x < 180$, măsura unghiului format de bisectoarele unghiului $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$.

42. Fie K o mulțime convexă de puncte din plan și P un poligon convex ale cărui vîrfuri aparțin mulțimii K. Să se arate că $P \cup \mathrm{Int}\ P \subset K$.

43. Fie P, P' poligoane convexe astfel încît $P \cup \mathrm{Int}\ P = P' \cup \mathrm{Int}\ P'$. Să se arate că $P = P'$.

44. Trei semidrepte: $|OA$, $|OB$, $|OC$, O fiind originea lor comună, formează unghiuri congruente:

$$\widehat{BOC} \equiv \widehat{COA} \equiv \widehat{AOB}.$$

1) Determinați măsura comună a acestor unghiuri.

2) Să se arate că $|OA'$, semidreapta opusă lui $|OA$, este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$.

45. Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente oarecare.

46. Fie $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ două unghiuri astfel încît: $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$ și Int $\widehat{AOB} \cap$ Int $\widehat{COD} =$ Int $\widehat{COB}$. Să se arate că:

1) $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$.

2) Bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ coincide cu bisectoarea lui $\widehat{AOD}$.

47. Fie $\mathrm{Seg}(\mathcal{P}) = \{[AB] \mid A, B \in \mathcal{P}\}$ mulțimea segmentelor conținute în planul $\mathcal{P}$. Un segment $[AB]$ pentru care $A = B$ se numește segment impropriu. $[AB]$ se zice propriu în caz contrar.

Scanned with OKEN Scanner

Definim funcţia: $\| \cdot \| : \text{Seg}(\mathcal{P}) \to \mathbf{R}$, prin:
$\| X \| = \delta(A, B)$, unde $X = [AB] \in \text{Seg}\ (\mathcal{P})$, iar $\delta : \mathcal{P}^2 \to \mathbf{R}$ este funcţia distanţă în planul $\mathcal{P}$.
Să se arate că:
1) $\| X \| \geqslant 0$, pentru orice $X \in \text{Seg}\ (\mathcal{P})$.
2) $\| X \| = 0 \Leftrightarrow X$ este impropriu.

48. Să se arate că există patru semidrepte $|OA$, $|OB$, $|OC$, $|OD$ astfel încît:

1) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$.

2) Mulţimile Int $\widehat{AOB}$, Int $\widehat{BOC}$, Int $\widehat{COD}$ sînt două cîte două disjuncte.

49. Fie $X, Y \in \text{Seg}\ (\mathcal{P})$ două segmente proprii. Să se arate că $X \equiv Y \Rightarrow \| X \| = \| Y \|$, unde $\| \cdot \| : \text{Seg}\ (\mathcal{P}) \to \mathbf{R}$ este funcţia definită în exerciţiul **47**.

50. Se consideră patru puncte coliniare A, B, C, D astfel încît $|AB| \equiv |CD|$ şi $|AC| \equiv |BD|$. Să se arate că segmentele $|AD|$ şi $|BC|$ au acelaşi mijloc.

51. Fie $ABCD$ un paralelogram şi $M \in \mathcal{P}$ oarecare. Să se arate că expresia $\| MA \|^2 + \| MC \|^2 - \| MB \|^2 - \| MD \|^2$ nu depinde de poziţia lui M în plan.

52. Fie ABC un triunghi şi $|AM|$, $|BN|$ mediane. Dacă $\| BC \| > \| AC \|$ atunci $\| AM \| < \| BN \|$ şi reciproc (laturii mai mari îi corespunde mediana mai mică şi reciproc).

53. În patrulaterul convex $ABCD$ diagonala $|AC|$ este congruentă cu latura $|AD|$. Să se arate că $\| BC \| < \| BD \|$.

54. Să se demonstreze că dacă există un punct D în interiorul unui triunghi ABC astfel încît $|AD| \equiv |AB|$, atunci $\| AB \| < \| AC \|$.

55. Să se demonstreze că suma lungimilor diagonalelor unui pentagon convex este mai mare decît perimetrul său.

56. În triunghiul ABC, $|AB| > |BC|$ şi $D \in |AC|$.
Să se demonstreze că $|AB| > |BD|$.

57. Două triunghiuri sînt aşezate astfel încît au o latură comună, iar alte două se intersectează. Să se demonstreze că suma lungimilor laturilor care se intersectează este mai mare decît suma lungimilor laturilor care nu se intersectează.

58. Să se determine un punct pe latura unui triunghi astfel încît suma distanţelor de la acest punct la celelalte două laturi să fie minimă.

59. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, iar x, y, z numere reale astfel încît $ax + by + cz = 0$, atunci $ayz + bzx + cxy < 0$.

60. Să se împartă interiorul unui triunghi în trei părţi din care să se poată alcătui interiorul unui dreptunghi.

61. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri, $|CM|$ şi $|C'M'|$ mediane în aceste triunghiuri.
Dacă $\| AC \| - \| CB \| = \| A'C' \| - \| C'B' \|$, $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $|CM| \equiv |C'M'|$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

62. Fie ABC un triunghi și $|CD|$ bisectoare. Dacă $\|AC\| + \|AD\| = \|BC\| + \|BD\|$, atunci triunghiul este isoscel ($|AC| \equiv |BC|$).

63. Fie $A \in \text{Int } \widehat{XOY}$, $\widehat{XOY}$ unghi ascuțit. Să se construiască un triunghi de perimetru minim astfel încît un vîrf al său să fie A, iar celelalte două să aparțină semidreptelor $|OX$ și $|OY$.

64. Fie unghiul $\widehat{MON}$ cu $m(\widehat{MON}) < 60$ și punctele $A \in \text{Int } \widehat{MON}$, $B \in \text{Int } \widehat{MON}$. Să se determine punctele C și D, $C \in |OM$, $D \in |ON$ astfel încît linia poligonală $ACDB$ să aibă lungime minimă.

65. Să se demonstreze că cel puțin unul dintre picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct interior unui poligon convex, pe laturi, este interior unei laturi.

66. Prin punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ ale triunghiului ABC se duce dreapta MN paralelă cu BC, $M \in AB$, $N \in AC$. Ce relație există între lungimile segmentelor $|MN|$, $|BM|$ și $|CN|$? Considerați următoarele cazuri 1) bisectoarele sînt interioare; 2) bisectoarele sînt exterioare; 3) o bisectoare este interioară iar cealaltă este exterioară. Cînd coincid punctele M și N?

67. În triunghiul ABC bisectoarea unghiului A intersectează latura $|BC|$ în L. Prin punctul A trece o dreaptă perpendiculară pe AL. Fie B_1 piciorul perpendicularei din B pe această dreaptă. Să se arate că perimetrul triunghiului BB_1C este mai mare decît perimetrul triunghiului ABC.

68. Fie I punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi. Să se demonstreze că dacă $m(\hat{A}) < m(\hat{B}) < m(\hat{C})$, atunci $|AI| > |BI| > |CI|$.

69. Fie M un punct oarecare situat pe bisectoarea unghiului exterior $\hat{C}$ al triunghiului ABC. Să se arate că

$$\|MA\| + \|MB\| > \|AC\| + \|BC\|.$$

70. Medianele corespunzătoare laturilor $|BC|$ și $|AC|$ ale triunghiului ABC sînt perpendiculare. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{2} < \frac{\|BC\|}{\|AC\|} < 2.$$

71. Este posibil să așezăm 7 segmente în planul $\mathcal{P}$ astfel încît fiecare să intersecteze exact alte trei? Dar 6 segmente pot fi așezate? Dar 8?

72. Se dau 7 segmente ale căror lungimi sînt mai mici decît 100 și mai mari decît 10. Să se arate că există trei cu care se poate construi un triunghi.

73. În planul raportat la un sistem de axe ortonormal se consideră un poligon convex P cu proprietatea că $(\exists)$ $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$ astfel încît $P \cup \text{Int } P = A \times B$.

Să se arate că P este un dreptunghi.

74. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\hat{A}) = 90$. Mediatoarea segmentului $[BC]$ taie AC în E și AB în D. Să se arate că $BE \cap CD \neq \varnothing$.

Scanned with OKEN Scanner

75. Fie $[BC]$ un segment propriu și a mediatoarea sa. Să se arate că: $a \cap \{B\,C\} = \emptyset$.

76. Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu și $A,\ B \in h,\ C, D \in k,\ A \neq B,\ C \neq D$. Să se determine un punct M astfel încît:

$$\| AM \| = \| MB \| \text{ și } \| CM \| = \| MD \|.$$

77. Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{h'k'}$ două unghiuri proprii cu proprietățile:

$$h \cap h' \neq \emptyset,\ k \cap h' \neq \emptyset,$$
$$h \cap k' \neq \emptyset,\ k \cap k' \neq \emptyset.$$

Să se arate că dacă s și s' sînt respectiv bisectoarele unghiurilor $\widehat{hk}$ și $\widehat{h'k'}$ atunci

$$s \cap s' \neq \emptyset.$$

78. Fie $\widehat{hk}$ și $\widehat{h'k'}$ două unghiuri proprii astfel încît intersecțiile $h \cap h'$, $k \cap h'$, $h \cap k'$, $k \cap k'$ sînt nevide.
Să se arate că există un punct $A \in \mathcal{P}$ astfel încît:

$$\mathrm{d}(A, h) = \mathrm{d}(A, k);$$
$$\mathrm{d}(A, h') = \mathrm{d}(A, k').$$

79. Fie ABC un triunghi și DE o dreaptă care nu este perpendiculară pe nici una din laturile triunghiului (punctele A, B, C, D, E sînt presupuse distincte). Să se arate că există trei puncte coliniare M, N, P cu proprietățile:

1) $M \in AB,\ N \in BC,\ P \in CA$;
2) $|MD| = |ME|$, $|ND| = |NE|$, $|PD| = |PE|$.

80. Fie ABC un triunghi echilateral, A' și B' mijloacele laturilor $[BC]$ respectiv $[AC]$, $\{H\} = AA' \cap BB'$, iar H' simetricul lui H față de punctul A'. Să se arate că triunghiul BHH' este echilateral și că $\| AH' \| = 2 \| BH' \|$.

81. Se consideră triunghiul ABC, $\mathrm{m}(\hat{A}) = 90$ în care $\| BC \| = 2 \| AB \|$. Notăm cu D și E respectiv piciorul bisectoarei unghiului $\hat{B}$ în triunghiul ABC și piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{BDC}$ în triunghiul BDC. Să se arate că $\triangle ABD = \triangle EBD = \triangle ECD$.

82. Fie ABC un triunghi și $M \in [BC]$ astfel încît $\| MB \| \neq \| AB \|$ și $\| MC \| \neq \| AC \|$. Să se arate că mediatoarea segmentului $[AM]$ intersectează exact două din laturile triunghiului ABC.

83. Să se arate că un triunghi ABC este echilateral dacă și numai dacă oricare ar fi punctele M, $N \in \mathrm{Int}\ ABC$ este îndeplinită relația $\| MN \| < \min(\| AB \|, \| BC \|, \| CA \|)$.

84. Fie S unul din semiplanele deschise limitate de dreapta d. Să considerăm aplicația:

$$g : S \to (0, +\infty)$$

definită prin:
$g(A) = \| AA' \|$, $(\forall) A \in S$, unde A' este piciorul perpendicularei din A pe d.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

1) g este surjectivă;
2) g este neinjectivă.

85. Fie ABC un triunghi. Să se arate că funcția $f: \{m(\hat{A}), m(\hat{B}), m(\hat{C})\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(m(\hat{A})) = \| BC \|$, $f(m(\hat{B})) = \| CA \|$, $f(m(\hat{C})) = \| AB \|$, este o funcție strict crescătoare.

86. Să se arate că în orice triunghi valoarea absolută a diferenței dintre lungimea a două laturi este mai mică sau egală decît valoarea absolută a diferenței dintre lungimile proiecțiilor lor pe latura a treia.

87. Fie P un poligon convex. Să se arate că:
1) Intersecția oricăror două diagonale ale poligonului aparține lui Int P.
2) Suma distanțelor unui punct arbitrar din plan la vîrfurile poligonului este strict mai mare decît semiperimetrul acestuia.

88. Să se arate că punctul din plan pentru care suma distanțelor la vîrfurile unui patrulater convex este minimă, este intersecția diagonalelor patrulaterului.

89. Fie ABC un triunghi cu: $\| AB \| = c$, $\| BC \| = a$ și $\| CA \| = b$. Știind că: $a = 1$ și $b, c \in \mathbf{N}^*$, să se arate că:

$$| AB | = | AC |.$$

90. Fie n un număr natural strict mai mare ca 2 și A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ puncte necoliniare. Fie $f: \mathcal{P} \to \mathbf{R}_+$ definită prin: $f(M) = x_1 \cdot \| MA_1 \| + \ldots + x_n \cdot \| MA_n \|$ unde $M \in \mathcal{P}$ este arbitrar și x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt numere reale strict pozitive. Fie $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Să notăm:

$$a_1 = d(A_1, \mathcal{M}), \ldots, a_n = d(A_n, \mathcal{M}), \text{ cu:}$$

$a_i \geq 0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că:

1) $\min f(M) \geq a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ cînd $M \in \mathcal{M}$.
2) Dacă: $\mathcal{M} \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}$ și dacă:

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, atunci pentru orice punct $P \in \mathcal{P}$ avem:

$$\frac{1}{n} f(P) \leq d(P, \mathcal{M}).$$

91. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$. Fie de asemenea $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ n puncte necoliniare și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. Considerăm funcția $f: \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(M) = x_1 \| MA_1 \| + x_2 \| MA_2 \| + \ldots + x_n \| MA_n \|.$$

Să se arate că dacă există $M_0 \in \mathcal{P}$ astfel încît:

$$f(M_0) = \min \{f(M) \mid M \in \mathcal{P}\},$$

atunci punctul M_0 este unic cu această proprietate.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

PARALELISM. ASEMĂNARE

1. Fie ABC un triunghi echilateral. Fie a, b două drepte cu proprietățile: $A \in a$, $AC \perp a$, $C \in b$, $b \parallel AB$. Să se arate că:

$$a \cap b \neq \emptyset.$$

2. Fie $ABCD$ un patrat și M, N, P, Q patru puncte respectiv situate pe laturile $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ astfel încît: $|AM| \equiv |BN| \equiv |CP| \equiv |DQ|$. Să se arate că $MNPQ$ este un pătrat.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\hat{A}) = 90$. Fie $|AD$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$, $D \in |BC|$. Fie a, b două drepte astfel încît: $a \cap b = \{D\}$, $a \perp AB$, $b \perp AC$, și să notăm: $a \cap AB = \{E\}$, $b \cap AC = \{F\}$. Să se arate că $AEDF$ este un ~~pătrat~~ dreptunghi.

4. Să se arate că suma lungimilor medianelor unui triunghi este cuprinsă în intervalul $\left[\frac{3}{2}p,\ 2p\right] \subseteq \mathbf{R}$, unde p este semiperimetrul triunghiului.

5. Fie $ABCD$ un pătrat. Fie $M \in |CD|$ și fie k bisectoarea unghiului $\widehat{BAM}$. Fie $\{K\} = |BC \cap k$. Să se arate că:

1) $K \in |BC|$;

2) $\|AM\| = \|BK\| + \|DM\|$.

6. Fie ABC un triunghi. Construim pătratele $ABDE$, $BCFG$ în exteriorul acestui triunghi și fie M mijlocul laturii $|AC|$.

Să se arate că: $\|DG\| = 2\|BM\|$.

7. Fie $ABCD$ un pătrat. Fie $K \in \text{Int } ABCD$, M, $L \in \mathcal{P}$, astfel încît:

1) $AKLM$ este un pătrat.

2) ~~$|KL| \cap |AD| \neq \emptyset$.~~ bună

Să se arate că:

$$|BK| \equiv |DM|.$$

8. Fie $ABCD$ un pătrat. Fie a, $b \subseteq \mathcal{P}$ două drepte cu următoarele proprietăți:

1) $a \perp b$;

2) $a \cap |BC| = \{M\}$, $a \cap |AD| = \{N\}$;

3) $b \cap |AB| = \{K\}$, $b \cap |CD| = \{L\}$.

Să se arate că:

$$|MN| \equiv |KL|.$$

9. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex. Știind că:

1) $|AB| \equiv |DE|$, $AB \parallel DE$;

2) $|BC| \equiv |EF|$, $BC \parallel EF$;

3) $|CD| \equiv |AF|$, $CD \parallel AF$,

să se arate că:

$$|AD| \cap |CF| \cap |BE| \neq \emptyset.$$

Scanned with OKEN Scanner

10. Fie $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$. Fie mulțimea:

$$\mathfrak{M}_{AB} = \{(C, D, E, F) \mid CDEF = \text{pătrat}, A, B \in CDEF\}.$$

Fie mulțimea:

$$M_{AB} = \{k \in \mathbf{R}_+ \mid k = \|AC\| + \|AD\| + \|AE\| + \|AF\|, (C, D, E, F) \in \mathfrak{M}_{AB}\}.$$

Să se arate că există un element: $(C_0, D_0, E_0, F_0) \in \mathfrak{M}_{AB}$, astfel încît:

$$\|AC_0\| + \|AD_0\| + \|AE_0\| + \|AF_0\| = \min_{k \in M_{AB}} k.$$

11. Fie $ABCD$ un romb. Fie $M \in |AD|$, $N \in |CD|$ astfel încît $|DM| \equiv |DN|$. Să se arate că triunghiul BMN este isoscel.

12. Fie $d \subseteq \mathcal{P}$ o dreaptă și S, S' semiplanele unic determinate de către d conform teoremei de separare. Fie $A, B \in S$, $A \neq B$, și $L > 0$ un număr real pozitiv. Fie mulțimea:

$$\Delta = \{(C, D) \in d^2 \mid C \neq D, \|CD\| = L\}.$$

Fie de asemenea mulțimea:

$$M_{AB} = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid x = \|AC\| + \|CD\| + \|DB\|, (C, D) \in \Delta\}.$$

Să se arate că există: $(C, D) \in \Delta$ astfel încît:

$$\|AC\| + \|CD\| + \|DB\| = \min\{x \mid x \in M_{AB}\}.$$

13. Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie a, b, c, d respectiv bisectoarele unghiurilor: $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$. Să notăm:

$$a \cap b = \{K\}, \quad b \cap c = \{L\}, \quad c \cap d = \{M\}, \text{ și } d \cap a = \{N\}.$$

Să se arate că $KLMN$ este un dreptunghi.

14. Fie $ABCD$ un pătrat și $E \in |AC|$ astfel încît $|AE| \equiv |AB|$. Fie a o dreaptă cu proprietățile următoare:

1) $a \perp AC$;
2) $a \cap |AC| = \{E\}$;
3) $a \cap |BC| = \{F\}$.

Să se demonstreze că: $|BF| \equiv |FE| \equiv |EC|$.

15. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu măsurile unghiurilor: $m(\hat{A}) = 20$, $m(\hat{B}) = 130$, $m(\hat{C}) = 110$, $m(\hat{D}) = 100$.

Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{ABD}$. Problema are soluția unică?

16. Fie ABC un triunghi echilateral. Paralela prin C la AB intersectează perpendiculara ridicată în A pe AC în punctul D. Fie M mijlocul segmentului $|CD|$. Să se arate că:

$$AM \parallel BC.$$

17. Să se arate că patrulaterul $AMCB$ din problema precedentă este un patrulater convex.

18. Să considerăm mulțimea:

$$M = \left\{x \in \mathbf{R}_+ \mid x = \frac{am(\hat{A}) + bm(\hat{B}) + cm(\hat{C})}{a + b + c}, \ A, B, C \text{ necoliniare}\right\}$$

unde s-a notat $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

$$\frac{a_0 m(\hat{A}_0) + b_0 m(\hat{B}_0) + c_0 m(\hat{C}_0)}{a_0 + b_0 + c_0} = \min M$$

dacă și numai dacă $A_0B_0C_0$ este un triunghi echilateral.

19. Fie ABC un triunghi și $M \in \text{Int } ABC$. Să se arate că: $m(\widehat{ABC}) \leqslant m(\widehat{AMC})$.

20. Fie $ABCD$ un patrulater convex, k, h, s respectiv bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$ iar $k \cap h = \{O\}$. Se știe că:

1) $h \cap s = \{O_1\}$;

2) $h \cap CD = \{E\}$, $E \neq D$.

Să se arate că:

a) $m(\widehat{AOB}) = 1/2(m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{CDA}))$;

b) $m(\widehat{DO_1E}) = 1/2 \mid m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{BCD}) \mid$.

21. În triunghiul ABC fie $|BL$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, $L \in |AC|$. Să se arate că:

$$\| BA \| > \| LA \|, \quad \| BC \| > \| LC \|.$$

22. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{B}) = 15$, $m(\hat{C}) = 30$. Perpendiculara ridicată în A pe AB intersectează BC în D. Să se arate că:

$$D \in |BC| \text{ și } \| BD \| = 2 \| AC \|.$$

23. Fie $|AB|$ un segment și $C \in |AB|$. Fie S, S' semiplanele unic determinate de AB și să considerăm punctele:

A_1, $B_1 \in S$, $C_1 \in S'$, satisfăcînd condițiile:

1) $AA_1 \perp AB$, $|AA_1| \equiv |BC|$;

2) $BB_1 \perp AB$, $|BB_1| \equiv |AC|$;

3) $CC_1 \perp AB$, $|CC_1| \equiv |AB|$.

Să considerăm dreptele:

$$a = B_1C_1, \quad b = A_1C_1, \quad c = A_1B_1$$

și punctele:

$$E, D \in |cC_1, \quad E', D' \in |bB_1, \quad E'', D'' \in |aA_1$$

astfel încît A_1B_1DE, $A_1C_1D'E'$, $B_1C_1D''E''$ sînt pătrate.

Să se arate că:

a) $|A_1D| \cap |B_1E| = \{C\}$;

b) $|A_1D'| \cap |C_1E'| = \{B\}$;

c) $|B_1D''| \cap |C_1E''| = \{A\}$.

24. Să se arate că un patrulater convex ale cărui unghiuri sînt două cîte două necongruente are cel puțin un unghi obtuz.

25. Considerăm punctele A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 astfel încît:

$|AD| \cap |BE| = \{C_1\}$, $|AC| \cap |BE| = \{D_1\}$, $|CA| \cap |BD| = \{E_1\}$,

$|CE| \cap |BD| = \{A_1\}$, $|DA| \cap |EC| = \{B_1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

$$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{EBD}) + m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{BDA}) = 180.$$

26. Să se demonstreze că în orice triunghi un unghi este ascuțit, drept sau obtuz după cum latura care i se opune are lungimea mai mică, egală sau mai mare decît dublul lungimii medianei corespunzătoare.

27. În triunghiul isoscel ABC, $|AB| \equiv |AC|$, avem:

$m(\widehat{ABC}) = 20$. Fie $P \in |BC|$, $Q \in |AB|$ astfel încît

$m(\widehat{ACQ}) = 60$, $m(\widehat{CAP}) = 50$. Să se arate că:

$$m(\widehat{APQ}) = 80.$$

28. Fie $\widehat{hk}$ un unghi ascuțit, $(m(\widehat{hk}) < 90)$, cu originea în O. Fie A un punct situat pe semidreapta h. Fie a o dreaptă cu proprietățile: 1) $a \perp h$, 2) $A \in a$. Să se arate că: $a \cap k \neq \emptyset$.

29. Fie ABC un triunghi dreptunghic și k mediatoarea ipotenuzei $|BC|$. Să se arate că k intersectează dreptele AC și BD.

30. Fie ABC un triunghi dreptunghic și fie F mijlocul ipotenuzei $|BC|$. Fie D și E punctele în care mediatoarea lui $|BC|$ intersectează dreptele AB și AC. Să se arate că perpendicularele coborîte din F pe BD, respectiv CD, taie BE respectiv AC.

31. În legătură cu problema precedentă, fie G și H punctele în care perpendicularele coborîte din F pe BD respectiv CD întîlnesc BE, respectiv AC. Dacă în plus $\{K\} = CD \cap BE$, să se arate că AFK este un triunghi isoscel.

32. În legătură cu problema precedentă arătați că $EGFH$ este un romb.

33. Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie M și N respectiv mijloacele segmentelor AD și BC. Să se arate că:

1) $|AC| \cap |BM| \neq \emptyset$, $|DN| \cap |AC| \neq \emptyset$;

2) Dacă $\{E\} = |BM| \cap |AC|$, $\{F\} = |DN| \cap |AC|$, atunci: $\{E, F\} \subseteq$ $\subseteq$ Int $ABCD$.

3) $|AE| \equiv |EF| \equiv |FC|$.

34. Fie $ABCD$ un paralelogram, și să considerăm punctele M și N situate respectiv pe laturile $|AD|$ și $|BC|$.

Fie $\{E\} = |BM| \cap |AC|$, $\{F\} = |DN| \cap |AC|$.

Să se arate că dacă: $|AE| \equiv |EF| \equiv |FC|$ atunci: $|AM| \equiv |MD|$ și $|NB| \equiv |NC|$.

35. Fie $ABCD$ un patrulater neconvex. Să se arate că mijloacele laturilor sale determină un paralelogram.

36. Fie ABC un triunghi și $A_1 \in |BC|$, $B_1 \in |AC|$, $C_1 \in |AB|$. Să se arate că mijloacele segmentelor $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ sînt necoliniare.

37. În patrulaterul convex $ABCD$ fie M, N mijloacele laturilor $|AD|$ și $|BC|$. Să se arate că dacă $2\|MN\| = \|AB\| + \|DC\|$, atunci $AB \parallel CD$.

Scanned with OKEN Scanner

38. În trapezul $ABCD$ avem relația: $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{CDA}) = 90$. Fie E, F respectiv mijloacele bazelor $|BC|$ și $|AD|$. Să se arate că:

$$\|EF\| = 1/2\,|\,\|AD\| - \|BC\|\,|.$$

39. Fie $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul laturii $|AD|$ și fie $E \in AB$ astfel încît $CE \perp AB$. Dacă $\|BC\| = 2\|AB\|$, atunci să se arate că $m(\widehat{DME}) = 3m(\widehat{AEM})$.

40. Să se arate că în orice patrulater convex mijloacele diagonalelor și punctul de intersecție al dreptelor determinate de mijloacele laturilor opuse sînt coliniare.

41. Fie ABC un triunghi și fie K', $L' \in CB$, $C \in |K'B|$, $B \in |CL'|$. Fie k, h respectiv bisectoarele unghiurilor $\widehat{ACK'}$, $\widehat{ABL'}$. Fie $N \in k$, $M \in h$ astfel încît: $AN \perp k$, $AM \perp h$.
Să se arate că: $\|MN\| = p$, unde p este semiperimetrul triunghiului.

42. În patrulaterul $ABCD$ să considerăm mijloacele M, N, P, Q ale laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$, respectiv. Să se arate că:
1) $|MP| \cap |NQ| \neq \emptyset$;
2) Dacă $|MP| \cap |NQ| = \{S\}$, atunci: $|MS| \equiv |SP|$, $|NS| \equiv |SQ|$.

43. Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie $P \in |BC|$, $Q \in |AD|$, astfel încît $PQ \| AB$. Fie de asemenea:

$$\{M\} = |AP| \cap |BQ| \text{ și } \{N\} = |PD| \cap |QC|.$$

Să se demonstreze că:
1) $MN \| AD$;
2) $\|MN\| = 1/2\,\|AD\|$.

44. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie $K \in AB$ astfel încît $|BK| \equiv |AB|$, $B \in |AK|$. Să notăm $\{E\} = BC \cap DK$. Să se demonstreze că:

$$\|AK\| + \|KD\| + \|DA\| = 2\,(\|EC\| + \|CD\| + \|DE\|).$$

45. Să se arate că lungimea unei linii mijlocii a unui triunghi este mai mică decît semisuma lungimilor laturilor pe care le intersectează și mai mare decît semidiferența lor.

46. Fie ABC un triunghi isoscel și să considerăm un punct A_1 situat pe baza $|BC|$ astfel încît $AA_1 \perp BC$ și D situat pe latura $|AB|$ astfel încît $|CD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$. Fie $E|$ piciorul perpendicularei coborîtă din D pe BC, respectiv F piciorul perpendicularei coborîtă din D pe CD. Arătați că: $\|A_1E\| = 1/4\,\|CF\|$.

47. Fie $D(\mathcal{P})$ mulțimea dreptelor din planul $\mathcal{P}$. Fie ABC un triunghi. Să considerăm mulțimea: $M = \{a \in D(\mathcal{P}) \mid A \in a\}$. Fie D mijlocul lui $|BC|$ și $a_0 \in M$ perpendiculara în A pe AD. Să se arate că:

$$d(B, a_0) + d(C, a_0) = \max_{a \in M} \{d(B, a) + d(C, a)\}.$$

48. În triunghiul ABC, $\|AB\| > \|AC\|$. Fie D un punct situat pe latura $|AB|$ astfel încît $|BD| \equiv |AC|$, și să notăm cu E, F respectiv mijloacele segmentelor $|AD|$ și $|BC|$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

$$m(\widehat{BEF}) = 1/2\ m(\hat{A}).$$

49. Fie $ABCD$ un paralelogram, E, F respectiv mijloacele laturilor $|AB|$ și $|AD|$. Să se arate că:

1) $|CE| \cap |BD| \neq \emptyset$, $|CF| \cap |BD| \neq \emptyset$;

2) Fie $\{L\} = |CE| \cap |BD|$, $\{N\} = |CF| \cap |BD|$.

Atunci $|BL| \equiv |LN| \equiv |ND|$.

50. Fie $ABCD$ un trapez. Linia mijlocie $|MN|$ $M \in |AD|$, $N \in |BC|$, intersectează diagonalele $|BD|$, $|AC|$ respectiv în P și Q. Știind că $|MP| \equiv |PQ| \equiv |QN|$, să se arate că raportul dintre lungimea bazei mici și lungimea bazei mari este 1/2.

51. Să se arate că bisectoarele interioare ale unui triunghi sînt înălțimi în triunghiul determinat de către dreptele suport ale bisectoarelor exterioare ale triunghiului.

52. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și fie A_1, B_1, C_1 respectiv picioarele perpendicularelor coborîte din A, B, C pe laturile opuse. Fie H ortocentrul triunghiului. Să se arate că:

$$\widehat{A_1HC} \equiv \hat{B}, \quad \widehat{C_1HB} \equiv \hat{A}, \quad \widehat{B_1HA} \equiv \hat{C}.$$

53. În triunghiul ascuțitunghic ABC fie $D \in |BC|$ piciorul înălțimii din A, E proiecția lui D pe AC, iar $F \in DE$. Să se arate că $AF \perp BE$ dacă și numai dacă:

$$\frac{\|FE\|}{\|FD\|} = \frac{\|BD\|}{\|DC\|}.$$

54. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \| CD$, $\|AB\| > \|CD\|$. Notînd cu M și N mijloacele laturilor $|AD|$ și $|BC|$, demonstrați că AN și MC nu pot fi paralele.

55. Fie ABC un triunghi dreptunghic și D, E, F, G patru puncte astfel încît $BCED$, $ACGF$ sînt pătrate și Int $BCED \cap$ Int $ABC = \emptyset$, Int $ACGF \cap$ $\cap$ Int $ABC = \emptyset$. Fie $\{K\} = DE \cap FG$. Să se arate că:

1) Punctele D, C, F sînt coliniare;

2) $\|AB\| = \|DD_1\| + \|FF_1\|$, unde D_1, F_1 sînt picioarele perpendicularelor coborîte din D, respectiv F, pe AB.

3) $BE \| AG$;

4) $KC \perp AB$.

56. Fie n un număr natural, $n \geqslant 2$. Notăm cu $\mathbf{R}^n$ mulțimea tuturor sistemelor ordonate de numere reale de forma $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Fie $\mathbf{R}^n_* = \mathbf{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Pe $\mathbf{R}^n_*$ definim relația:

$$A \mathcal{R} B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \text{ și } B \text{ sînt proporționale.}$$

Arătați că $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență pe $\mathbf{R}^n_*$ și apoi calculați mulțimea claselor de echivalență: $\mathbf{R}^n_*/\mathcal{R}$.

57. Construiți numai cu rigla și compasul conjugatul armonic al unui punct M față de punctele A și B. (A, B și M fiind trei puncte coliniare date.)

Scanned with OKEN Scanner

58. Fie $|OX$, $|OY$, $|OZ$ trei semidrepte cu originea comună O, distincte și neopuse două cîte două. Fie A, B două puncte situate pe semidreapta $|OX$, C, D pe demidreapta $|OY$ și N pe $|OZ$, astfel încît: $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$, $\|OD\| = d$. Fie s paralela prin A la NB. Fie E punctul de intersecție dintre s și semidreapta $|OZ$. Să se arate că paralela prin E la ND trece prin punctul C dacă și numai dacă: $(a, c)\ \mathcal{R}\ (b, d)$, unde $\mathcal{R}$ este relația de echivalență din problema 56, pentru $n = 2$.

59. Fie ABC un triunghi și să considerăm: $K \in |AC|$, $L \in |BC|$ astfel încît:

$$\frac{\|CK\|}{\|KA\|} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\|CL\|}{\|LB\|} = \frac{c}{d},$$

unde a, b, d, c sînt numere reale pozitive. Să notăm $\{M\} = |AL| \cap |BK|$. Să se calculeze rapoartele:

$$\frac{\|KM\|}{\|MB\|}, \quad \frac{\|LM\|}{\|MA\|}.$$

60. În exteriorul triunghiului ABC considerăm punctele M, N, P astfel încît: $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACM} \equiv \widehat{BCN}$, $\widehat{BCA} \equiv \widehat{CBN} \equiv \widehat{ABP}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{PAB} \equiv \widehat{CAM}$. Demonstrați că dreptele BM, AN, CP sînt concurente.

61. Fie ABC un triunghi cu $\|AB\| \neq \|AC\|$ și fie F, $D \in |AC|$ respectiv mijlocul lui $|AC|$ și piciorul înălțimii din B pe AC. Fie h bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$. Să se arate că: $h \subseteq \text{Int } \widehat{FBD}$.

62. Fie ABC un triunghi. Fie L mulțimea perechilor (E, F) de puncte din plan cu proprietățile: $E \in |AB|$, $F \in |AC|$, $EF \parallel BC$. Fie M mulțimea tuturor punctelor I cu proprietatea că există un element $(E, F) \in L$ astfel încît I se obține ca intersecție a dreptelor CE și BF. Să se arate că mulțimea M este exact mediana corespunzătoare laturii $|BC|$.

63. Fie ABC un triunghi și fie G centrul său de greutate. Fie d o dreaptă cu proprietățile:

1) $G \in d$,

2) $d \cap AB \neq \emptyset$, $d \cap AC \neq \emptyset$,

3) $\{A, B, C\} \cap d = \emptyset$. Fie $d \cap AB = \{P\}$, $d \cap AC = \{Q\}$. Să se arate că:

a) Propoziția „$P \in |AB|$ sau $Q \in |AC|$" este adevărată.

b) Dacă $P \in |AB|$ și $Q \in |AC|$ atunci:

$$\frac{\|PB\|}{\|PA\|} + \frac{\|QC\|}{\|QA\|} = 1;$$

c) Dacă $P \notin |AB|$ și $Q \in |AC|$ atunci:

$$\frac{\|QC\|}{\|QA\|} - \frac{\|PB\|}{\|PA\|} = 1;$$

d) Dacă $P \in |AB|$ și $Q \notin |AC|$ atunci:

$$\frac{\|PB\|}{\|PA\|} - \frac{\|QC\|}{\|QA\|} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

64. În trapezul $ABCD$ să notăm cu M mijlocul bazei mari $|AB|$ și fie N un punct pe latura $|BC|$, diferit de mijlocul acestei laturi. Să se arate că:

1) $MN \cap AC \neq \emptyset$;
2) Dacă $MN \cap AC = \{U\}$, atunci $AB \cap UD \neq \emptyset$;
3) Dacă $AB \cap UD = \{X\}$, atunci $A \in |XM|$;
4) $DN \cap AB \neq \emptyset$;
5) Dacă $DN \cap AB = \{Y\}$, atunci $B \in |MY|$;
6) $|XM| \equiv |MY|$.

65. Fie ABC un triunghi. Fie P, Q, R trei puncte astfel încît PAB, QAC, RBC sînt triunghiuri isoscele asemenea. Știind că Int $PAB \cap$ $\cap$ Int $ABC = \emptyset$, Int $QAC \cap$ Int $ABC = \emptyset$, $R \in$ Int ABC, să se arate că patrulaterul $APRQ$ este paralelogram.

66. Fie ABC un triunghi cu unghiul $\hat{B}$ ascuțit, și $m(\hat{B}) = 2\, m(\hat{C})$, iar AD este înălțimea din A. Fie $E \in AB$, astfel ca $B \in |AE|$, $|BE| \equiv |BD|$. Să se arate că:

1) $ED \cap AC \neq \emptyset$;
2) Dacă $ED \cap AC = \{F\}$, atunci:

a) $|FD| \equiv |FC| \equiv |FA|$. b) $\triangle ABC \sim \triangle AEF$; c) $\|AB\| = \|DC\| - \|DB\|$.

67. Fie d o dreaptă și S unul dintre semiplanele determinate de către d. Fie A, $B \in d$, $A \neq B$, și fie A_1, $B_1 \in S$ astfel încît $AA_1 \perp d$, $BB_1 \perp d$; să notăm $a = \|AA_1\|$, $b = \|BB_1\|$. Să se arate că dacă a și b sînt constante, atunci distanța $d(O, d)$, unde O este punctul de intersecție al dreptelor AB_1 și A_1B, nu depinde de poziția punctelor A și B pe dreapta d.

68. Fie ABC un triunghi. Fie O, H respectiv punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului și ortocentrul triunghiului, iar E mijlocul laturii $|BC|$. Să se arate că:

$$\|AH\| = 2\,\|OE\|.$$

69. Fie ABC un triunghi cu unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ ascuțite. Să notăm cu G centrul său de greutate. Fie E, D picioarele perpendicularelor din G respectiv A pe BC. Să se arate că:

$$\|BD\|^2 - \|DC\|^2 = 3(\|BE\|^2 - \|EC\|^2).$$

70. Fie ABC un triunghi și $D \in$ Int ABC. Fie $E \in \mathcal{P}$, astfel încît:

1) Int $BEC \cap$ Int $ABC = \emptyset$;
2) $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{EBC})$;
3) $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCE})$.

Să se arate că triunghiurile DBE și ABC sînt asemenea.

71. Fie ABC, $A_1B_1C_1$ două triunghiuri astfel încît:

$$A \in |A_1B_1|,\ B \in |B_1C_1|,\ C \in |C_1A_1|.$$

Să se arate că dacă $\widehat{B_1AB} \equiv \widehat{C_1BC} \equiv \widehat{A_1CA}$ atunci:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

72. Fie ABC un triunghi și să notăm cu:

$$a = \| BC \|,\ b = \| CA \|,\ c = \| AB \|$$

lungimile laturilor triunghiului. Să se arate că dacă: $a^2 = b^2 + bc$, atunci:

$$m(\hat{A}) = 2\, m(\hat{B}).$$

73. Să se demonstreze că mijloacele laturilor paralele ale unui trapez și punctul de intersecție al diagonalelor sînt coliniare.

74. În triunghiul ABC se știe că $m(\hat{A}) = 2\, m(\hat{B})$. Notăm $a = \| BC \|$, $b = \| CA \|$, $c = \| AB \|$. Să se calculeze a în funcție de b și c.

75. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \| CD$ și $\{O\} = | AC | \cap | BD |$. Fie d o dreaptă cu proprietățile:

1) $O \in d$;
2) $AB \| d$.

Să punem $\{K\} = d \cap | AD |$, $\{M\} = d \cap | BC |$, $a = \| CD \|$, $b = \| AB \|$. Să se calculeze $\| KM \|$ în funcție de a și b.

76. În triunghiul ABC fie M mijlocul laturii $| AC |$ și B_1 piciorul perpendicularei coborîtă din B pe AC. Să se arate că dacă $\widehat{ABB_1} \equiv \widehat{B_1BM} \equiv \widehat{MBC}$, atunci:

$$m(\hat{B}) = 90.$$

77. Fie $ABCD$ un paralelogram și d o dreaptă astfel încît $A \in d$, $d \cap | BD | \neq \emptyset$, $d \cap | BC | \neq \emptyset$.

Fie E, F, G respectiv punctele de intersecție dintre d și $| BD |, | BC |, CD$. Să se arate că:

1) $C \in | DG |$;
2) $\| AE \| \cdot \| AF \| = \| AG \| \cdot \| EF \|$.

78. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $E \in | BC |$, $F \in | AD |$, astfel încît:

$$\frac{\| BE \|}{\| EC \|} = \frac{\| AF \|}{\| FD \|} = \frac{\| AB \|}{\| CD \|}.$$

Presupunînd că: $AB \cap CD = \{O\}$, să se arate că EF este dreapta-suport a bisectoarei unghiului $\widehat{AOD}$.

79. Fie ABC un triunghi. Fie h bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ și notăm $h \cap | BC | = \{D\}$. Fie k bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{C}$ situată în semiplanul limitat de AC care conține punctul B. Fie $F \in AC$, $C \in | AF |$, astfel încît $DF \perp k$. Fie s bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, și fie $E \in | AB |$, astfel încît $DE \perp s$. Să se arate că:

$$\| AD \|^2 = \| AE \| \cdot \| AF \|.$$

80. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și fie $A_1 \in | BC |$, $B_1 \in | AC |$ respectiv picioarele înălțimilor din A și B.

Considerăm punctele $A_1 \in | AC |$, $B_2 \in | BC |$, A_3, $B_3 \in | AB |$, astfel încît $A_1A_2 \perp AC$, $B_1B_2 \perp BC$, $A_2A_3 \perp AB$, $B_2B_3 \perp AB$. Fie M și N respectiv punctele de intersecție ale dreptelor A_2A_3 și AA_1, respectiv B_2B_3 și BB_1. Să se arate că triunghiul A_2MA_1 este congruent cu triunghiul NB_2B_1 și că fiecare dintre ele este asemenea cu triunghiul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

81. Fie BB_1 și CC_1 înălțimi în triunghiul ascuțitunghic ABC. Să se arate că:

$$\| BC \|^2 = \| AB \| \cdot \| BC_1 \| + \| AC \| \cdot \| CB_1 \|.$$

82. Fie ABC un triunghi isoscel și fie M un punct situat pe baza $| BC |$. Să se arate că:

$$\| BM \| \cdot \| MC \| = \| AC \|^2 - \| AM \|^2.$$

83. În triunghiul ABC fie $| AL$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, $L \in | BC |$. Să se arate că:

$$\| AL \|^2 = \| AB \| \cdot \| AC \| - \| BL \| \cdot \| LC \|.$$

84. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A}) = 120$. Să se arate că:

$$\| BC \|^2 = \| AC \|^2 + \| AB \|^2 + \| AC \| \cdot \| AB \|.$$

85. Fie $| OM$, $| ON$ două semidrepte cu originea comună O, astfel încît $m(\widehat{MON}) = 90$. Să considerăm punctele:

$$A \in | OM,\ B, C, D \in | ON, \text{ astfel încît:}$$

$$| OA | \equiv | OB | \equiv | BC | \equiv | CD |.$$

Să se arate că triunghiurile ABC, DBA sînt asemenea.

86. Fie $ABCD$ un paralelogram în care:

$$\| AC \|^2 \cdot \| BD \|^2 = \| AB \|^4 + \| AD \|^4.$$

Să se arate că măsura unghiului obtuz este egală cu 135, adică:

$$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB}) = 135.$$

87. Fie ABC un triunghi isoscel, $| AB | \equiv | AC |$, $D \in | AB |$. Arătați că:

$$\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| AC \|^2 = \| BD \|^2 + 2 \| AD \|^2 + 3 \| CD \|^2.$$

88. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\hat{C}) = 90$. Să se arate că:

$$\| AB \|^3 > \| AC \|^3 + \| BC \|^3.$$

89. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\hat{A}) = 90$. Fie $K \in | BC |$, astfel încît $AK \perp BC$; de asemenea fie $P \in | AB |$, $T \in | AC |$, $KP \perp AB$, $KT \perp AC$. Să se calculeze $\| BC \|$ în funcție de:

$$\| BP \| = m, \ \| CT \| = n.$$

90. Să se arate că în orice trapez, suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor neparalele plus de două ori produsul lungimilor bazelor.

91. Fie ABC un triunghi isoscel, $| AB | \equiv | BC |$, cu $m(\hat{B}) = 20$. Dacă $a = \| AC \|$, $b = \| AB \|$, atunci arătați că:

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

92. Calculați lungimile laturilor unui triunghi cunoscînd lungimile medianelor triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

93. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sînt egale cu b și c. Să se determine lungimea bisectoarei unghiului drept.

94. Fie ABC un triunghi cu $\|AC\| = b$, $\|CB\| = a$. Fie D, E respectiv mijloacele laturilor $|BC|$, $|AC|$. Știind că AD este perpendiculară pe BE și că $1/2 < a/b < 2$ se cere să se calculeze lungimea laturii $|AB|$.

95. Fie punctele A, B, C, $D \in \mathcal{P}$, fixate. Să se determine mulțimea:

$$\mathfrak{M} = \{M \in \mathcal{P} \mid \|AM\|^2 + \|BM\|^2 = \|CM\|^2 + \|DM\|^2\}.$$

96. Fie ABC un triunghi, $D \in |BC|$, $E \in |AC|$, $F \in |AB|$, astfel încît semidreptele:

$$|AD, \quad |BE, \quad |CF$$

sînt respectiv bisectoarele unghiurilor:

$$\widehat{BAC}, \quad \widehat{ABC}, \quad \widehat{BCA}.$$

Să considerăm dreptele: e, f, d, cu proprietățile:
1) $E \in e$, $F \in f$, $D \in d$;
2) $e \perp AC$, $f \perp AB$, $d \perp BC$.
Să se arate că dacă:

$$e \cap f \cap d \neq \emptyset$$

atunci triunghiul ABC este isoscel.

97. Fie k, x două numere reale pozitive fixate, $0 < x < 180$. Să considerăm următoarea mulțime de triunghiuri:

$$M = \{T = ABC \mid \|AB\| + \|AC\| = k, \ \mathrm{m}(\widehat{BAC}) = x\}$$

și mulțimea de numere:
$N = \{p(T) \mid T \in M\}$, unde $p(T)$ este perimetrul triunghiului T.
Fie $(A_0B_0C_0) \in M$ un triunghi isoscel, $|A_0C_0| \equiv |C_0B_0|$.
Să se arate că:

$$p(T_0) = \min \{y \mid y \in N\},$$

unde am notat $T_0 = A_0B_0C_0$.

98. Să se arate că într-un triunghi ABC cu laturile de lungimi

$$\|AB\| = \sqrt{2}, \quad \|BC\| = 1, \quad \|CA\| = \sqrt{3},$$

lungimile segmentelor determinate de bisectoarea unghiului $\hat{A}$ pe latura $|BC|$ sînt respectiv: $\sqrt{6} - 2$ și $9 - \sqrt{6}$.

99. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\mathrm{m}(\hat{A}) = 90$ Fie $D \in |BC|$, $AD \perp BC$, și $|AM$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$, $M \in |BC|$. Dacă:

$$\|BM\| = m, \quad \|MC\| = n, \quad \|BC\| = i, \quad \|AD\| = h,$$

să se arate că:

$$m^2 + n^2 = \frac{i^3}{i + 2h}.$$

Scanned with OKEN Scanner

100. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\hat{C}) = 90$. Fie $E \in |AB|$ astfel încît $CE \perp AB$. Să considerăm $M \in |AC|$ cu $EM \| BC$ și $D \in |AB|$ cu $MD \| CE$. Fie $P \in |BC|$ cu $MP \| AB$ și $F \in |AB|$ cu $PF \| CE$. Știind că $\|CN\| = a$, $\|PN\| = b$, $\|BF\| = c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, să se arate că:

$$\|AD\| \cdot \|DM\| = \frac{a^3c^2}{b^3}.$$

101. Fie ABC un triunghi isoscel, $|AB| \equiv |AC|$, cu $m(\hat{A}) = 30$. Dacă $\|AB\| = c$, $\|BC\| = a$, $\|CA\| = b$, să se arate că are loc una dintre relațiile:

$$\frac{a^2}{c} = c + a\sqrt{2};$$

$$\frac{a^2}{c} = c - a\sqrt{2}.$$

102. Fie ABC un triunghi isoscel, $|AB| \equiv |AC|$, $m(\hat{A}) = 30$. Fie $A' \in |BC|$, $AA' \perp BC$, $B' \in |AC|$, $BB' \perp AC$. Fie $\{H\} = AA' \cap BB'$. Fie $I \in AA'$ astfel ca $A' \in |AI|$, $|HA'| \equiv |A'I|$. Să se arate că:

$$\|AI\| = 2\|BC\|.$$

103. Un triunghi ABC are $m(\hat{C}) = 15$, $m(\hat{A}) = 120$, $\|AB\| = 4$. Să se calculeze $m(\hat{B})$, $\|AC\|$ și $\|BC\|$.

104. Fie M un punct mobil pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC, diferit de mijlocul acestei laturi. Bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$ taie dreptele AC și AB respectiv în E și F, iar bisectoarea unghiului $\widehat{AMB}$ taie AC, respectiv AB, în D și H. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor EH și FD cînd M parcurge segmentul $|BC|$.

105. Fie M și N două puncte situate pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ ale triunghiului ABC, astfel încît:

$$\frac{\|BG\|}{\|GN\|} = \frac{\|CG\|}{\|GM\|} = 2,$$

unde G este punctul de intersecție al segmentelor $|BN|$ și $|CM|$. Demonstrați că $|AM| \equiv |MB|$ și $|AN| \equiv |NC|$.

106. O paralelă la latura $|BC|$ a triunghiului ABC taie AB și AC în M și N. Paralela prin M la AC taie BC în P iar paralela prin N la AB taie BC în Q. Notăm cu E intersecția dreptelor MP și NQ, cu F mijlocul lui $|PQ|$ iar cu L mijlocul lui $|MN|$. Arătați că punctele A, L, F și E sînt coliniare.

107. Fie M un punct situat pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC iar N și P proiecțiile lui M pe AB și AC. Notăm:

$$h_b = \|BB'\|, \quad h_c = \|CC'\|$$

unde $|BB'|$, $|CC'|$ sînt înălțimi. Să se arate că:

$$\min(h_b, h_c) \leqslant \|MP\| + \|MN\| \leqslant \max(h_b, h_c).$$

Scanned with OKEN Scanner

108. Într-un trapez isoscel diagonalele sînt perpendiculare. Arătați că linia mijlocie și înălțimea sînt congruente.

109. Pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale unui triunghi ABC considerăm punctele A', B', C' astfel încît:

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} = \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} = \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|}.$$

Notăm cu D mijlocul laturii $|BC|$ iar cu E simetricul lui A față de mijlocul segmentului $|A'B'|$. Demonstrați că punctele C', D și E sînt coliniare.

110. Fie D un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC. Bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ taie $|AC|$ în E iar bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$ taie $|AB|$ în F. Notînd cu P intersecția dreptelor BE și CF, demonstrați că A, D, P sînt coliniare.

111. Fie ABC un triunghi avînd $\hat{A} \in 30°$. Notăm cu O mijlocul medianei $|AA'|$ iar cu M și N proiecțiile lui A' pe AB și AC. Demonstrați că triunghiul MON este echilateral.

112. Fie $ABCD$ un patrulater convex în planul $\mathcal{P}$. Să se determine mulțimea punctelor M din planul $\mathcal{P}$ cu proprietatea că $\|MA\|^2 + \|MC\|^2 = \|MB\|^2 + \|MD\|^2$. Discuție.

113. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Să se arate că

$$\|AD\| > \|AB\| + \|AC\| - \|BC\|,$$

unde D este piciorul înălțimii din A.

114. În ce patrulatere convexe $ABCD$ trei și numai trei dintre triunghiurile AOB, BOC, COD, DOA sînt asemenea? (O este punctul de intersecție al diagonalelor).

115. Fie d o dreaptă fixă și A un punct fix nesituat pe d. În semiplanul $|dA$ se consideră punctele variabile M și N astfel încît patrulaterul $AMON$ este paralelogram. (O este proiecția lui A pe d, iar $|AO|$ este diagonală). Fie $k > 0$, un număr fixat. Dreptele AM și AN intersectează dreapta d în punctele B și C, iar pe segmentele $|MB|$ și $|NC|$ considerăm respectiv punctele E și F astfel încît

$$\frac{\|EM\|}{\|EB\|} = \frac{\|FN\|}{\|FC\|} = k.$$

Să se afle locul geometric al intersecției paralelei prin E la MO cu paralela prin F la NO.

116. Fie un patrulater convex $ABCD$, M mijlocul laturii $|BC|$, și N mijlocul laturii $|CD|$; AM și BN se intersectează în P. Fie:

$$\frac{\|PA\|}{\|PM\|} = k, \quad \frac{\|PB\|}{\|PN\|} = \frac{k}{k+2}.$$

1) Să se arate că $ABCD$ este trapez pentru toate valorile admisibile ale lui k.

2) Să se precizeze valorile lui k pentru care $ABCD$ este un paralelogram.

Scanned with OKEN Scanner

117. Se consideră hexagonul convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ale cărui laturi au lungimea $\| A_iA_{i+1} \| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Să se arate că avem:

$$\min (\| A_1A_4 \|, \| A_2A_5 \|, \| A_3A_6 \|) \leqslant 2.$$

118. Fie $ABCD$ un patrulater convex, I, J mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Să se arate că pentru orice punct K al segmentului $[IJ]$ există un paralelogram avînd vîrfurile pe laturile patrulaterului dat și intersecția diagonalelor în punctul K.

119. Să se demonstreze că dacă un pentagon convex $ABCDE$ are toate laturile congruente, iar $m(\hat{A}) \geqslant m(\hat{B}) \geqslant m(\hat{C}) \geqslant m(\hat{D}) \geqslant m(\hat{E})$, atunci pentagonul este regulat.

120. În triunghiul echilateral $A_0A_1A_2$ fie punctele A_3, A_5 pe A_0A_1 și A_4, A_6 pe A_0A_2 astfel încît $A_3 \in |A_1A_5|$, $A_4 \in |A_2A_6|$ și $A_3A_4 \| A_5A_6 \| \| A_1A_2$. Să se arate că mijloacele segmentelor $|A_2A_3|$, $|A_4A_5|$, $|A_6A_1|$ sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

121. Se consideră un patrulater convex $ABCD$, o translație F în plan de vector $\overrightarrow{AC}$ și se notează $B' = F(B)$, $D' = F(D)$. Să se arate că:

1) Laturile paralelogramului $BDD'B'$ sînt congruente cu diagonalele patrulaterului dat și unghiul format de două laturi este congruent cu unghiul diagonalelor patrulaterului dat.

2) Diagonalele paralelogramului $BDD'B'$ au lungimile de două ori mai mari ca segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterul dat.

122. Fie $a \| a'$ și $b \| b'$ două perechi de drepte paralele. Există o translație care să transforme pe a în a' și pe b în b'?

123. Fie $|AB|$, $|A_1B_1|$ două segmente astfel încît $|AB| \equiv |A_1B_1|$. Dacă M_1 este centrul rotației care transformă pe A în A_1 și pe B în B_1, iar M_2 este centrul rotației care transformă pe A în B_1 și pe B în A_1 să se arate că dreapta M_1M_2 trece prin mijlocul segmentului ce unește mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|A_1B_1|$.

124. Fie un paralelogram $ABCD$ și perpendicularele $|BK|$ și $|BH|$ pe AD respectiv CD. Se notează cu E ortocentrul triunghiului BKH.

1) Să se determine imaginea triunghiului BKE prin translația de vector $\overrightarrow{KD}$.

2) Să se calculeze $\| BE \|$ știind că $\| KH \| = a$ și $\| BD \| = b$.

125. Se consideră în plan triunghiul echilateral ABC și P un punct oarecare diferit de A, B și C. Să se arate că se poate construi un triunghi ale cărui laturi să fie congruente cu segmentele $|AP|$, $|BP|$ respectiv $|CP|$ (teorema lui *D. Pompei*).

126. Fie $ABCD$ și $BNMK$ două pătrate care nu au puncte interioare comune. Folosind o rotație convenabilă să se arate că mijlocul E al lui $|AN|$, piciorul perpendicularei din B pe CK și punctul B sînt trei puncte coliniare. (Numerotarea vîrfurilor se face în „același sens" pe ambele pătrate.)

127. Pe laturile $|AB|$ și $|BC|$ ale triunghiului ABC se construiesc pătrate avînd centrele D și E, astfel încît punctele C și D sînt situate de aceeași parte a dreptei AB, iar punctele A și E sînt separate de dreapta BC. Arătați că dreptele AC și DE se intersectează sub un unghi de măsură 45.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

CERCUL

1. Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează în M astfel încît $|AM| \equiv |MD|$ și $|CM| \equiv |MB|$. Să se arate că punctele A, B, C, D, sînt pe un cerc.

2. Segmentul $[MN]$ are lungime variabilă, trece prin punctul fix A iar raportul $\|MA\| / \|AN\|$ este constant. Să se arate că dacă M se află pe un cerc atunci și N se află pe un cerc.

3. Să se determine lungimea laturii unui pătrat $ABCD \subset \mathcal{C}(O_1, r) \cap \cap \mathcal{C}(O_2, r)$ știind că $B, C \in \mathcal{C}(O_2, r)$, $A, D \in \mathcal{C}(O_1, r)$ și $\|O_1O_2\| = r$.

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Să se determine $E \in [AB]$ astfel încît $\widehat{DEA} \equiv \widehat{DEC}$. În ce condiții poate fi rezolvată problema?

5. Să se construiască un triunghi ABC dacă se cunosc mijloacele D și E ale laturilor $[AC]$, respectiv $[BC]$ și dreapta l pe care se află bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

6. Să se demonstreze că orice linie poligonală simplu închisă este inclusă într-un disc a cărui rază este $\frac{1}{4}$ din perimetrul liniei poligonale.

7. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se determine mulțimea punctelor M din plan cu proprietatea că triunghiurile ABM și ACM sînt isoscele.

8. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar M, N și P mijloacele segmentelor $[AH]$ și respectiv $[BH]$, $[CH]$. Paralelele duse prin M, N și P la laturile triunghiului ABC se intersectează în D, E și F. Să se arate că: 1) $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$; 2) H este centrul cercului circumscris triunghiului DEF.

9. Fie $ABDC$ un dreptunghi astfel încît $\|AB\|^2 = 2\|AC\|^2$. Fie N un punct al cercului de diametru $[AB]$ situat în exteriorul dreptunghiului $ABCD$. Notăm $\{E\} = CN \cap AB$, $\{F\} = DN \cap AB$. Să se arate că $\|AF\|^2 + \|BE\|^2 = \|AB\|^2$. (Problema lui *Fermat*).

10. Într-un triunghi dreptunghic raportul dintre raza cercului circumscris și raza cercului înscris este $\frac{5}{2}$. Arătați că lungimile laturilor triunghiului sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5.

11. În orice triunghi, cercul circumscris intersectează segmentul care unește centrul cercului înscris cu centrul unui cerc exînscris într-un punct care este mijlocul acestui segment.

12. Un pătrat este înscris într-un triunghi oarecare astfel încît o latură a pătratului este situată pe cea mai mare latură a triunghiului. Arătați că $r\sqrt{2} < a < 2r$, unde r este raza cercului înscris în triunghi, iar a este lungimea laturii pătratului.

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie $[AB]$ și $[CD]$ coarde în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $|AB| \equiv |CD|$ și $[AB] \cap [CD] = \{E\}$. Arătați că $|AE| \equiv |ED|$ și $|CE| \equiv |EB|$.

14. Arătați că suma lungimilor diametrelor cercurilor înscris, și circumscris unui triunghi dreptunghic este egală cu suma lungimilor catetelor.

15. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. O dreaptă variabilă ce trece prin A intersectează cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ în M și cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în N. Dacă $MN \parallel O_1O_2$, atunci lungimea segmentului $[MN]$ este maximă.

16. Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este înscris într-un sector de cerc de rază R și a cărui coardă are lungimea $2a$. Arătați că $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

17. Fie $[AB]$ o coardă în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, iar $C, D \in [AB]$ astfel încît $|AC| \equiv |CD| \equiv |DB|$. Arătați că $\widehat{AOC} < \widehat{COD}$.

18. Fie $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $m(\widehat{AOB}) < 90$. Fie $D \in AO$ astfel încît O să fie situat între A și D și $|CD| \equiv |OB|$, unde C este al doilea punct de intersecție al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ cu dreapta BD. Arătați că $m(\widehat{ADB}) = \frac{1}{3} m(\widehat{AOB})$. (Trisecția unghiului).

19. $\mathcal{C}(O_1, r_1) \cap \mathcal{C}(O_2, r_2) = \{A, B\}$. Două drepte ce trec prin A intersectează pe $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ în C și E iar pe $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în D și F. Să se arate că

$$\frac{\|EF\|}{\|CD\|} = \frac{d(B, EF)}{d(B, CD)}.$$

20. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc oarecare, $A, B, M \in \mathcal{C}(O, r)$, A și B fixe iar M variabil. Fie N punctul de pe dreapta AM astfel încît M este situat între A și N și $|MN| \equiv |MB|$. Determinați locul geometric descris de N.

21. Fie $ABCD$ un trapez $(AD \parallel BC)$. Cercurile de diametre $[AC]$ și $[BD]$ se intersectează în E și F. Să se arate că $EF \perp AD$, iar dreptele AB, CD, EF sînt concurente.

22. În triunghiul ABC avem $\|BC\| < \|AB\|$. Cercul cu centrul în B și de rază $\|BC\|$ intersectează pe AC în E și pe AB în D. Să se arate că $m(\widehat{DEA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{ABC})$.

23. Prin punctul $K \in \mathcal{C}(O, r)$ trec o coardă AK și tangenta BC. Perpendiculara în O pe OA intersectează pe AK în M și pe BC în N. Să se arate că

$$|NK| \equiv |NM|.$$

24. Fie $A, B, C, M \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît MB este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$ și $\|MA\| > \|MB\| > \|MC\|$. Notăm cu K piciorul perpendicularei din B pe AM și cu L piciorul perpendicularei din B pe CM. Să se arate că $|AK| \equiv |CL|$.

25. În triunghiul ABC bisectoarea unghiului $\hat{C}$ intersectează mediatoarea laturii $[AB]$ în D. Să se arate că punctul D se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

26. Două cercuri sînt tangente interior în punctul A. Segmentul $[AB]$ este diametru în cercul mai mare. Coarda $[BK]$ a cercului mare este tangentă la cercul mic în C. Să se arate că $|AC$ este bisectoare în triunghiul ABK.

27. Fie $[AB]$ diametru în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $C \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $OC \perp AB$. Prin punctul $D \in [OC]$ trece coarda $[EF]$ astfel încît $EF \parallel AB$. Să se arate că $m(\widehat{ABE}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CBE})$.

28. Fie $A \in \mathcal{C}(O, r)$, $D \in [OA]$. Coarda $[BC]$ trece prin D și $BC \perp AO$. Tangenta în C la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ intersectează OA în E. Să se arate că $|CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BCE}$.

29. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. O secantă ce trece prin A intersectează pe $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ în C și pe $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în D. Să se demonstreze că măsura unghiului $\widehat{CBD}$ nu depinde de poziția secantei.

30. Pe un cerc se consideră patru puncte. Să se demonstreze că dreptele determinate de mijloacele arcelor opuse sînt perpendiculare.

31. Într-un cerc suma pătratelor lungimilor a două coarde perpendiculare este mai mare sau egală cu pătratul lungimii diametrului, iar suma pătratelor lungimilor segmentelor în care coardele sînt împărțite de punctul lor de intersecție este egală cu pătratul lungimii diametrului.

32. Două cercuri congruente se intersectează în punctele A și B. O secantă ce trece prin A intersectează un cerc în C iar celălalt în D. Fie E piciorul perpendicularei din B pe CD. Să se arate că $|CE| \equiv |ED|$.

33. Într-un cerc avem următoarele coarde paralele: $[AB] \parallel [ED]$ și $[AC] \parallel [FD]$. Să se demonstreze că $[FB] \parallel [EC]$.

34. Printr-un punct dat F să se ducă o secantă la un cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încît suma distanțelor de la punctele de intersecție ale cercului cu secanta la punctul F să fie maximă (minimă).

35. Două cercuri sînt tangente exterior în K. Două secante ce trec prin K intersectează un cerc în A și C, iar celălalt în B și D. Să se arate că $AC \parallel BD$.

36. Să se demonstreze că perpendicularele pe o coardă ridicate în extremitățile ei intersectează un diametru în două puncte egal depărtate de centrul cercului.

37. Fie $[AB]$ un diametru în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, C și D punctele de intersecție ale unei secante h cu cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Notăm cu A_1 și B_1 picioarele perpendicularelor duse din A și respectiv B pe h. Să se arate că $|A_1C| \equiv |DB_1|$.

38. Fie $A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{C}(O, r)$ (punctele sînt așezate pe cerc în ordinea în care sînt scrise în enunțul problemei) astfel încît $AB \parallel A'B'$ și $|BC| \equiv |B'C'|$. Să se demonstreze că $|AC| \equiv |A'C'|$.

39. Un cerc intersectează două cercuri concentrice: pe unul în punctele A și B, iar pe celălalt în punctele C și D. Să se demonstreze că $AB \parallel CD$.

40. Să se determine raza unui cerc cunoscînd lungimile coardelor $[AB]$ și $[BC]$ și distanța de la mijlocul coardei $[AB]$ la dreapta BC.

Scanned with OKEN Scanner

41. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ coarda $[AB]$ intersectează diametrul $[A'B']$ în C astfel încît $\widehat{A'CA} \in 45°$. Să se arate că $\| BC \|^2 + \| AC \|^2$ nu depinde de poziţia punctului C.

42. Fie ABC un unghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $| BD$ bisectoarea lui, iar $[DE]$ coardă paralelă cu AB. Să se arate că $| DE | \equiv | BC |$.

43. n coarde ale unui cerc se intersectează în m puncte (un punct de intersecţie a coardelor se consideră de k ori dacă prin el trec $k + 1$ coarde). În cîte părţi este împărţit interiorul cercului?

44. Să se arate că patrulaterul în care lungimea segmentului determinat de mijloacele a două laturi opuse este egală cu semisuma lungimilor celorlalte laturi este un trapez.

45. În triunghiul ABC cunoaştem $m(\hat{B}) = 45$, $m(\hat{C}) = 60$. Fie M şi N mijloacele laturilor $[AC]$ şi $[AB]$ respectiv. Cercurile de diametre $[BM]$ şi $[CN]$ se intersectează în punctele P şi Q. Notăm $[PQ] \cap [MN] = \{F\}$. Să se determine raportul $\dfrac{\| NF \|}{\| FM \|}$.

46. Construiţi cu rigla şi compasul triunghiul ascuţitunghic ABC cunoscînd lungimea segmentelor $[BC]$, $[AH]$ şi $[AA']$ în care A' este proiecţia lui A pe BC iar H este ortocentrul.

47. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi M intersecţia dreptelor AD şi BC. Cercul circumscris triunghiului MAB taie dreapta CD în E şi F. Demonstraţi că triunghiul MEF este isoscel.

48. Dintr-un punct A exterior unui cerc se duce o secantă care taie cercul în B şi C şi o tangentă AT. Prin punctul M situat pe dreapta AT se duce paralela MN la TC. Demonstraţi că punctele M, T, B, N sînt conciclice.

49. În trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$ punctele A şi B sînt fixe iar C şi D sînt mobile astfel încît segmentele $[AD]$ şi $[CD]$ au lungimi constante. Aflaţi locul geometric al intersecţiei diagonalelor.

50. Printr-un punct fix O situat pe segmentul $[AB]$ ducem o semidreaptă mobilă pe care luăm punctele M şi N astfel încît $| OA | \equiv | OM |$ şi $| OB | \equiv | ON |$.
Aflaţi locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor AM şi BN.

51. Fie A un punct fix pe un cerc dat, M mobil pe acelaşi cerc, iar N un punct cu proprietatea că $\triangle AMN$ este echilateral. Aflaţi locul geometric al punctului N.

52. Dintr-o bucată de tablă dreptunghiulară cu dimensiunile L şi l astfel încît $1 \leqslant \dfrac{L}{l} \leqslant 2$ trebuie să se taie două discuri de raze egale astfel încît să se piardă cît mai puţin material. Aflaţi raza fiecărui disc.

53. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC iar A_1, B_1, C_1 intersecţiile bisectoarelor cu mediatoarele corespunzătoare. Demonstraţi că: 1) A_1B_1 este mediatoarea segmentului $[IC]$ 2) I este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

Scanned with OKEN Scanner

54. Considerăm pătratele $ABCD$, $BCFE$, $EFGH$.
Demonstrați că:
1) Triunghiurile CAF și CGA sînt asemenea;
2) CA este tangentă cercului circumscris triunghiului AFG;
3) Aflați suma măsurilor unghiurilor $\widehat{AFD}$ și $\widehat{AGD}$.

55. Pe un cerc se consideră punctele fixe A și B și punctul mobil M. Fie N mijlocul segmentului $[MB]$, iar P proiecția lui N pe AM.
1) Demonstrați că dreapta NP trece printr-un punct fix;
2) Aflați locul geometric al punctului P.

56. Se dau două cercuri tangente exterior în A, avînd centrele O_1 și O_2. Dreapta O_1O_2 mai taie cercurile în B și C. Fie PQ o tangentă comună exterioară a celor două cercuri (P este pe primul cerc, Q pe al doilea). Demonstrați că $BP \perp CQ$

57. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. O dreaptă este tangentă la aceste cercuri în punctele M și N respectiv. Arătați că $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MBN}) = 180$.

58. Din punctul M exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se duce tangenta MT, $T \in \mathcal{C}(O, r)$. O dreaptă ce trece prin M intersectează cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în P și Q iar coarda $[CD]$ este paralelă cu MT. Notăm $\{A\} = CP \cap MT$, $\{B\} = QD \cap MT$.
Să se arate că $\| MT \|^2 = \| MA \| \cdot \| MB \|$.

59. Fie $[MN]$ diametru în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Coarda $[AB]$ este paralelă cu MN iar dreptele AN și BN intersectează tangenta în M la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în P și respectiv Q. Să se arate că produsul $\| MP \| \cdot \| MQ \|$ nu depinde de alegerea coardei $[AB]$.

60. Fie d_1, d_2, d_3 drepte astfel încît $\{O\} = d_1 \cap d_2 \cap d_3$, și fiecare din cele șase unghiuri cu vîrful în O formate de dreptele d_1, d_2, d_3 are măsura egală cu 60. Să se arate că proiecțiile oricărui punct din plan, diferit de O, pe d_1, d_2, d_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

61. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă $| AC | < | BC |$, iar $M \in [BC]$ astfel încît $\| AC \| + \| CM \| = \| MB \|$, atunci perpendiculara în M pe BC intersectează mediatoarea segmentului $[AB]$ într-un punct P situat pe $\mathcal{C}(O, r)$.

62. Să se demonstreze că dintre toate triunghiurile ABC pentru care se dau o latură $[AB]$ și măsura unghiului opus $m(\hat{C})$, triunghiul isoscel cu baza $[AB]$ are bisectoarea corespunzătoare unghiului $\hat{C}$ cea mai mare.

63. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $[BC]$. Să se arate că cele două cercuri care trec prin A și sînt tangente ipotenuzei în B, respectiv C sînt tangente între ele.

64. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A' \in [BC]$ $B' \in [AC]$ și $C' \in [AB]$.
1) Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$ $BC'A'$ și $CA'B'$ se intersectează într-un punct O.
2) Să se calculeze măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COA}$ în funcție de măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

65. Se consideră mulțimea triunghiurilor congruente în plan care au un vîrf fix și un al doilea vîrf variabil pe o dreaptă d. Ce loc geometric descrie al treilea vîrf al triunghiului?

66. Fie două triunghiuri ABC și $AB'C'$ care au vîrful A comun. Să presupunem că triunghiul ABC este fixat, iar B' și C' se mișcă în plan astfel încît triunghiul variabil $AB'C'$ este congruent cu triunghiul din poziția inițială. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor variabile BB' și CC'.

67. Fie $ABCD$ un pătrat variabil avînd vîrful A fix și vîrful C variabil pe un cerc ce trece prin A. Ce locuri geometrice descriu vîrfurile B și D?

68. Prin mijlocul M al coardei $[AB]$ a cercului $\mathcal{C}(O, r)$ trec coardele $[CD]$ și $[EF]$. Să se arate că dreptele $CE\,(CF)$ și $DF\,(DE)$ intersectează dreapta AB în puncte simetrice în raport cu M.

69. Triunghiul ABC este înscris în $\mathcal{C}(O, r)$. Fie AA_1, BB_1, CC_1 înălțimile sale, H ortocentrul și fie E intersecția dreptei CC_1 cu $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că $|AH| \equiv |AE|$.

70. Fie $\widehat{hk}$ un unghi ascuțit, $A, B \in h$. Să se determine un punct $C \in k$ astfel încît măsura unghiului $\widehat{ACB}$ să fie maximă. Să se construiască punctul $\mathcal{C}$ folosind linia și compasul.

71. Să se demonstreze că dintre toate triunghiurile ABC pentru care se dau o latură $[AB]$ și măsura unghiului opus $m(\hat{C})$, triunghiul isoscel cu baza $[AB]$ are mediana corespunzătoare unghiului $\hat{C}$ cea mai mare.

72. Dintre toate triunghiurile pentru care sînt cunoscute lungimea unei laturi și măsura unghiului opus ei să se determine triunghiul cu perimetrul maxim.

73. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și PT_1, PT_2 tangentele la cerc prin P ($T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, r)$). Fie $A \in \mathcal{C}(P, \|PT_1\|) \cap \text{Int } \widehat{T_1PT_2}$. Dreptele AT_1 și AT_2 intersectează a doua oară $\mathcal{C}(O, r)$ în M_1 și respectiv M_2. Să se arate că $[M_1M_2]$ este diametru în $\mathcal{C}(O, r)$.

74. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ de diametru $[AB]$ și o coardă $[MN]$ perpendiculară pe raza $[OB]$ în E. Pe semidreapta $|OB$ se ia punctul P astfel încît E este mijlocul segmentului $[OP]$ și fie $D = PM \cap \mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că $m(\widehat{AMD}) = 3m(\widehat{BM})$.

75. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor BCH, ACH și ABH sînt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC.

76. Fie ABC un triunghi echilateral și $D \in [BC]$.
Să se arate că cercurile circumscris triunghiurilor ABD și ADC sînt congruente. Aceeași problemă dacă triunghiul ABC este isoscel ($|AB| \equiv |AC|$).

77. Fie A, B puncte fixe distincte pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ iar $K \in \mathcal{C}(O, r)$ variabil. Notăm cu M mijlocul liniei poligonale AKB (dacă, spre exemplu $|AK| > |KB|$ atunci M este un punct pe segmentul $[AK]$ astfel încît $\|AM\| = \|MK\| + \|KB\|$). Să se determine locul geometric al punctului M.

Scanned with OKEN Scanner

78. Fie două cercuri secante în A și B, iar Q un punct pe dreapta AB. Prin Q se duc două drepte: prima taie primul cerc în C și D, a doua taie al doilea cerc în E și F. Demonstrați că punctele C, D, E, F sînt conciclice.

79. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel ($|AB| \equiv |AC|$). Notăm cu $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ înălțimile, iar cu H ortocentrul. Cercul de diametru $[BC]$ taie paralela dusă prin H la BC în punctele M și N. Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor $A'MN$ și $HB'C'$ sînt tangente.

80. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$, punctul $P \in \mathcal{C}(O, r)$ și punctul Q pe semidreapta $|OP$ astfel că P este mijlocul segmentului $[OQ]$. O coardă variabilă $[ST]$ în acest cerc trece prin mijlocul razei $[OP]$.
Să se arate că avem

$$\|QS\| + \|QT\| = 2\,\|ST\|.$$

81. Se consideră două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ care nu sînt concentrice. Se cere locul geometric al centrelor cercurilor $\mathcal{C}(O, r)$ care intersectează fiecare din cele două cercuri în cîte două puncte diametral opuse. În ce condiții acest loc geometric este axa radicală a celor două cercuri date?

82. Se consideră trei cercuri astfel că centrele lor nu sînt coliniare. Să se arate că există un cerc care intersectează fiecare din cele trei cercuri în puncte diametral opuse.

83. Fie ABC un triunghi și H ortocentrul său. Se consideră trei cercuri care au centrele în mijloacele laturilor triunghiului dat și trec prin H. Să se arate că există un cerc concentric cu centrul circumscris triunghiului ABC și care intersectează fiecare din cele trei cercuri în puncte diametral opuse.

84. Fie $ABCD$ un pătrat. Construim cercul $\mathcal{C}_1$ cu centrul în D și de rază $\|AD\|$ și cercul $\mathcal{C}_2$ cu diametrul $[AD]$. Fie $P \in \mathcal{C}_1 \cap \text{Int}\,ABCD$ și $\{K\} = \mathcal{C}_2 \cap |PD|$. Să se demonstreze că $\|PK\| = d(P, AB)$.

85. Bisectoarea interioară $|AF$ a triunghiului ABC intersectează cercul înscris în triunghi în E și D. Să se arate că $|AD| > |EF|$.

86. Prin punctul C situat pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ trec două drepte care intersectează coarda $[AB]$ în punctele D și E iar cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în punctele F și G. Ce poziție trebuie să ocupe C pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ pentru ca patrulaterul $DEGF$ să fie inscriptibil?

87. Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și paralelogramul $ABCD$ satisfac următoarele proprietăți: $A \in \mathcal{C}(O, r)$, $[AB] \cap \mathcal{C}(O, r) = \{B'\}$,
$[AC] \cap \mathcal{C}(O, r) = \{C'\}$, $[AD] \cap \mathcal{C}(O, r) = \{D'\}$.
Să se arate că $\|AC\| \cdot \|AC'\| = \|AB\| \cdot \|AB'\| + \|AD\| \cdot \|AD'\|$.

88. Două cercuri se intersectează în A și B. O secantă ce trece prin A intersectează un cerc în C, iar pe celălalt în D. Tangentele în C și D la cercuri se intersectează în E. Să se arate că patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil.

89. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{C} \in 90°$), $CD \perp AB$. Fie M și N picioarele perpendicularelor din B și respectiv A pe o dreaptă ce trece prin C. Să se arate că $m(\overset{\frown}{MDN}) = 90$.

Scanned with OKEN Scanner

90. În triunghiul ABC, $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ și $K \in [AB]$. Cercul cu centrul în K și de rază $\| BK \|$ intersectează pe BC în M. Notăm $\{D\} = MK \cap AC$. Să se arate că $m(\widehat{ADM}) = m(\hat{B}) - m(\hat{C})$.

91. Fie $A \in \mathcal{C}(O, r)$. Raza $[OC]$ a cercului $\mathcal{C}(O, r)$ intersectează cercul de diametru $[OA]$ în punctul E, iar raza $[OD]$ în punctul F. Fie C_1 piciorul perpendicularei din C pe OD. Să se arate că $| CC_1 | \equiv | EF |$.

92. Două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. $[KA]$ și $[KB]$ sînt coarde în cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ iar dreptele KA și KB intersectează cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în punctele C și D. Să se demonstreze că tangenta la cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ în K este paralelă cu CD.

93. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Fie $D \in [AB]$ și $E \in [AC]$ astfel încît $| AD | \equiv | AH |$ și $| AE | \equiv | AO |$. Să se arate că lungimea segmentului $[DE]$ este egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABC.

94. Să se demonstreze că bisectoarea interioară a unui unghi al unui patrulater inscriptibil și bisectoarea exterioară a unghiului opus primului unghi se intersectează pe cercul în care este înscris patrulaterul.

95. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se arate că centrul cercului circumscris triunghiului AIC se află pe bisectoarea interioară a unghiului $\hat{B}$.

96. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, R)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$ sînt tangente exterior. Să se determine raza cercului tangent celor două cercuri și uneia din tangentele exterioare comune.

97. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă cunoaștem $\| AB \| = c$ și $\| BC \| = a$, să se determine $\| AC \|$.

98. Să se construiască un punct P interior triunghiului ABC astfel încît $| AK | \equiv | BE | \equiv | CH |$, unde K, E, H sînt picioarele perpendicularelor duse din P pe dreptele AB, respectiv BC și AC.

99. Fie ABC un triunghi. Să se determine poziția unui punct $M \in AC$ astfel încît suma razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor AMB și BCM să fi minimă.

100. Într-un triunghi ale cărei laturi au lungimile a, b, c este înscris un cerc. O tangentă la cerc intersectează două laturi ale triunghiului astfel că din triunghi se formează două figuri geometrice: un patrulater și un triunghi. Să se arate că triunghiul nou format are perimetrul $a + b - c$ sau $b + c - a$ sau $a - b + c$.

101. Într-un triunghi este înscris un cerc astfel încît două din punctele de tangență ale cercului cu laturile triunghiului împart aceste laturi în rapoartele $\frac{m}{n}$ și respectiv $\frac{p}{q}$. Să se determine rapoartele lungimilor laturilor triunghiului dat.

102. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $[CC_1]$ înălțime, $C_1 \in AB$. Notăm cu A_1 și B_1 picioarele perpendicularelor din C_1 pe AC și respectiv pe BC. Să se arate că patrulaterul ABB_1A_1 este inscriptibil.

Scanned with OKEN Scanner

103. Trei cercuri congruente, de rază r, tangente două cîte două, sînt înscrise într-un cerc de rază R. Să se arate că $r = R(2\sqrt{3} - 3)$.

104. Fie $ABCD$ un paralelogram, $m(\widehat{ABC}) > 90$, O punctul de intersecție a diagonalelor, B' piciorul perpendicularei duse din D pe diagonala $[AC]$, C' piciorul perpendicularei duse din D pe latura $[AB]$, A' piciorul perpendicularei duse din D pe $[BC]$. Să se arate că O se află pe cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$.

105. În triunghiul ABC, $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ sînt înălțimi, iar A_2, B_2, C_2, mijloacele segmentelor $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ respectiv. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ și $A_2B_2C_1$ trec prin ortocentrul triunghiului ABC și fiecare din ele trece prin mijlocul unei laturi a triunghiului ABC.

106. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{C} \in 90°$) și $D \in [AB]$. Perpendiculara în D pe $[AB]$ intersectează pe $[AC]$ în E, cercul circumscris triunghiului ABC în F și F', iar pe BC în G astfel încît F și C nu sînt separate de dreapta AB. Să se arate că $\|DF\|^2 = \|DE\| \cdot \|DG\|$.

107. Fie $ABCD$ un trapez oarecare ($AB \parallel CD$), $\{E\} = AD \cap BC$ $\{M\} = AC \cap BD$. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABE și CDE sînt tangente interior, iar cercurile circumscrise triunghiurilor AMB și CMD sînt tangente exterior.

108. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Să se arate că cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD sînt tangente dacă și numai dacă cercurile înscrise în triunghiurile ABD și BCD sînt tangente.

109. În triunghiul dreptunghic $ABC(\hat{C} \in 90°)$ cunoaștem:

1) lungimea a a catetei $[BC]$ și raza r a cercului înscris;

2) lungimea c a ipotenuzei $[AB]$ și raza r a cercului înscris.

Să se determine lungimile celorlalte laturi în cele două cazuri.

110. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se arate că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, ACD, ABD sînt vîrfurile unui dreptunghi.

111. Fie ABC un triunghi oarecare, $[CD$ bisectoare interioară, $D \in AB$. Fie $L \in AC$ astfel încît DL să fie tangentă la cercul înscris în triunghiul ABC. Să se arate că DL este paralelă cu tangenta în C la cercul circumscris triunghiului ABC.

112. Printr-un punct al unui cerc trec trei coarde. Cercurile care au aceste coarde ca diametre se mai intersectează două cîte două în cîte un punct. Arătați că cele trei puncte de intersecție sînt coliniare.

113. Fie $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ înălțimi în triunghiul ascuțitunghic ABC. Să se demonstreze că înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoarele triunghiului $A_1B_1C_1$, iar ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$.

114. Fie ABC un triunghi echilateral, $D \in [AC]$. Raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ABD și DBC este 1/2. Să se determine raportul $\dfrac{\|AD\|}{\|DC\|}$.

Scanned with OKEN Scanner

115. Fie $\widehat{hk}$ un unghi de vîrf M și fie $A,\ B \in h$ și $C,\ D \in k$ astfel încît $|AB| \equiv |CD|$. Să se găsească locul geometric al celui de-al doilea punct de intersecție N a cercurilor circumscrise triunghiurilor MAD și MCB, cînd $[AB]$ și $[CD]$ alunecă pe laturile unghiului.

116. Într-un semicerc de rază R este înscris un trapez, iar în trapez este înscris un cerc de rază r. Determinați raza r.

117. Să se arate că măsura unghiului sub care se intersectează două drepte *Simpson* corespunzătoare la două puncte $P,\ Q$ situate pe cercul circumscris unui triunghi ascuțitunghic ABC nu depinde de punctele P și Q, ci de măsura arcului $\widehat{PQ}$.

118. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{C} \in 90°$), $[BD]$ bisectoarea unghiului $\hat{B}$. Dacă $\|AC\| = 2 \cdot \|BC\|$ atunci $[AD]$ este congruent cu latura decagonului regulat înscris într-un cerc de rază $\|AB\|$, iar $[BD]$ este congruent cu latura pentagonului regulat înscris într-un cerc de rază $\|BC\|$.

119. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic avem inegalitățile $0{,}4 < \frac{r}{h_c} < 0{,}5$, unde r este raza cercului înscris în triunghi iar h_c este lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

120. Fie ABC un triunghi isoscel ($|AB| \equiv |BC|$). Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ are centrul pe latura $[AC]$ și este tangent la dreptele AB și BC. O tangentă la cerc intersectează pe AB în M și pe BC în N. Să se arate că $\|AM\| \cdot \|NC\| = \left(\frac{\|AC\|}{2}\right)^2$.

121. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{C} \in 90°$), CD înălțime. Să se arate că pentru orice $K \in \mathcal{C}(A, \|AC\|)$ dreapta KD este perpendiculară pe diametrul ce trece prin A al cercului circumscris triunghiului AKB.

122. Fie ABC un triunghi oarecare, $|AH|$ înălțime, O centrul cercului circumscris. Să se arate că $\widehat{OAB} \equiv \widehat{CAH}$.

123. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, D mijlocul arcului $\widehat{AB}$, E mijlocul arcului $\widehat{AC}$. Să se arate că DE este paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{A}$.

124. Fie ABC un triunghi oarecare, $D \in [BC]$. Fie $O,\ O_1,\ O_2$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv ABD și ACD. Să se arate că patrulaterul AO_1OO_2 este inscriptibil.

125. Se consideră hexagonul convex $ABCDEF$ astfel încît: $AB \| DE$, $BC \| EF$, $CD \| AF$ și $|AD| \equiv |CF| \equiv |BE|$. Arătați că hexagonul $ABCDEF$ este inscriptibil.

126. În triunghiul dreptunghic $ABC(\hat{C} \in 90°)$, $|CD|$ este înălțime. Fie $R,\ R_1,\ R_2$ razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BDC și ADC respectiv, iar $r,\ r_1,\ r_2$ razele cercurilor înscrise în aceste triunghiuri. Să se arate că: 1) $R^2 = R_1^2 + R_2^2$; 2) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

127. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, $\{M\} = AC \cap BE$. Să se arate că $|MC| \equiv |BC|$.

Scanned with OKEN Scanner

128. Să se determine lungimea diagonalei unui pentagon regulat a cărui latură are lungimea a.

129. Fie $ABCDEFGHIK$ un decagon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că $\| AD \| = \| OA \| + \| AB \|$.

130. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se înscriu două poligoane regulate: un decagon și un decagon stelat. Să se arate că modulul diferenței lungimilor laturilor acestor poligoane este R.

131. Notăm cu a_n lungimea laturii poligonului regulat cu n vîrfuri înscris în $\mathcal{C}(O, R)$. Să se arate că $a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$, în două moduri: 1) geometric; 2) algebric.

132. Fie a_9 lungimea laturii nonogonului regulat înscris în $\mathcal{C}(O, R)$. Să se arate că: 1) a_9 este egală cu diferența dintre lungimea celei mai mari diagonale a nonogonului regulat și lungimea celei mai mici diagonale a aceluiași nonogon; 2) a_9 și R sînt incomensurabile.

133. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu laturile opuse neparalele. Notăm $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = AD \cap BC$.

Bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{AEC}$ intersectează latura $[BC]$ în M și latura $[AD]$ în N, iar bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BFD}$ intersectează latura $[AB]$ în P și latura $[CD]$ în Q. Arătați că patrulaterul $MPNQ$ este romb.

134. Fie ABC un triunghi dreptunghic $(\hat{C} \in 90°)$, $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului și cu I centrul cercului înscris. Știind că triunghiul BIO este dreptunghic să se arate că lungimile laturilor triunghiului ABC sînt proporționale cu numele 3, 4, 5.

135. În triunghiul ABC unghiul $\hat{A}$ este obtuz, iar $\| BC \| = 6$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC dacă se știe că pe acest cerc se află centrul cercului care trece prin punctele B, C și H, H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

136. Pentagonul $ABCDE$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O_2, r)$. Cunoaștem $d(E, AB) = a$, $d(E, BC) = b$, $d(E, CD) = c$. Să se calculeze $d(E, AD)$.

137. Se dă unghiul $\widehat{hk}$ cu vîrful în O și punctele variabile A, B situate pe semidreptele h, respectiv k astfel încît $\| OA \| + \| OB \| = K$ (const.). Care este locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului AOB?

138. Două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele B și C. Fie A un punct variabil pe cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și D, E punctele în care AB respectiv AC intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Să se arate că punctul $\{M\} = DC \cap EB$ descrie două arce de cerc.

139. Într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se înscrie un dreptunghi $ABCD$. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ taie cercul în E. Diametrul $[EF]$ intersectează pe AB în M, iar AE intersectează pe FD în N. Să se arate că $|DF| \equiv |FB|$ și $MN \perp EF$.

140. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Se notează cu A' proiecția lui A pe BD și cu B' proiecția lui B pe AC. Să se arate că dreapta $A'B'$ este paralelă cu CD.

Scanned with OKEN Scanner

141. Se consideră un punct O variabil pe mediatoarea segmentului $[AB]$ și un cerc variabil $\mathcal{C}(O', r)$ tangent dreptei AO avînd centrul mobil O' pe segmentul $[AB]$. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție M al celei de-a doua tangente din A la cercul variabil cu perpendiculara în B pe dreapta OB.

142. Fie $P_0P_1 \ldots P_n$ un poligon convex inscriptibil.
Să se arate că avem relația metrică:

$$\frac{\| P_1P_n \|}{\| P_0P_1 \| \cdot \| P_0P_n \|} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\| P_iP_{i+1} \|}{\| P_0P_i \| \cdot \| P_0P_{i+1} \|}.$$

(Teorema lui *Ptolemeu* generalizată).

143. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se înscrie trapezul $ABCD$, în care laturile paralele $[AB]$ și $[CD]$ au lungimile egale cu latura hexagonului înscris în cerc, respectiv cu latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

1) Să se arate că diagonalele trapezului sînt perpendiculare și laturile neparalele au lungimile egale cu latura pătratului înscris în cerc.

2) Dacă G este punctul diametral opus lui C, să se arate că lungimea segmentului $[AG]$ este egală cu lungimea laturii dodecagonului înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

3) Să se arate că $\| BF \| = \frac{\| AD \| + \| AG \|}{2}$, unde F este punctul în care înălțimea din B a triunghiului ABC intersectează dreapta CG.

144. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Notăm $\{E\} = AB \cap CD$ și fie ET_1, ET_2 tangentele la cercul $\mathcal{C}(O, r)$.
Presupunem că $AC \cap ET_1 = \{F\}$.
Să se arate că $BT \parallel ET_1$ dacă și numai dacă $|EF| \equiv |FT_1|$.

145. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt tangente exterior în punctul C. O tangentă comună le intersectează în punctele A și B respectiv. Calculați lungimile laturilor triunghiului ABC.

146. Trei cercuri de raze R_1, R_2, R_3 sînt tangente exterior două cîte două. Arătați că cercul care trece prin punctele de tangență ale celor trei cercuri are raza $\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$.

147. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează sub un unghi drept. Arătați că lungimea tangentei comune este $\sqrt{2r_1r_2}$.

148. Fie $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ două cercuri astfel încît $\mathcal{C}(O_1, r_1) \cap \mathcal{C}(O_2, r_2) \neq \emptyset$. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc tangent cu cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ și tangent la una dintre tangentele comune cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$.
Arătați că $r = \frac{a^2 - (r_1 - r_2)^2}{4(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$, unde $a = \| O_1O_2 \|$.

149. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt tangente exterior în K. Fie $T_1 \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$, $T_2 \in \mathcal{C}(O_2, r_2)$ astfel încît T_1T_2 să fie tangentă cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Să se arate că $\frac{\| T_1K \|^3}{\| T_2K \|^3} = \frac{\| O_1M \|}{\| O_2N \|}$, M și N fiind mijloacele coardelor $[KT_1]$ și respectiv $[KT_2]$.

Scanned with OKEN Scanner

150. 1) Un cerc taie laturile unui triunghi ABC în punctele $A_1, A_2 \in |BC|$, $B_1, B_2 \in |AC|$, $C_1, C_2 \in |AB|$. Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{\|A_1B\|}{\|A_1C\|} \cdot \frac{\|A_2B\|}{\|A_2C\|} \cdot \frac{\|B_1C\|}{\|B_1A\|} \cdot \frac{\|B_2C\|}{\|B_2A\|} \cdot \frac{\|C_1A\|}{\|C_1B\|} \cdot \frac{\|C_2A\|}{\|C_2B\|} = 1 \text{ (Carnot)}.$$

2) Să se deducă de aici că dacă dreptele-suport ale laturilor opuse ale unui hexagon inscriptibil se intersectează, atunci intersecțiile sînt trei puncte coliniare (teorema lui *Pascal*).

151. Cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ sînt tangente exterior în A. Din punctul $B \in \mathcal{C}(O, r)$ se duce tangenta BT la cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $T \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$. Să se arate că raportul $\frac{\|BA\|}{\|BT\|}$ nu depinde de B.

152. Să se arate că centrul radical al cercurilor care au ca diametri înălțimile unui triunghi este ortocentrul triunghiului.

153. Fie $[MN]$ diametru în $\mathcal{C}(O, r)$ iar A, B, C sînt pe tangenta în M la $\mathcal{C}(O, r)$ astfel încît B este între A și C, $|AB| \equiv |BC|$. Dreptele AN, BN, CN intersectează a doua oară $\mathcal{C}(O, r)$ în A_1 și respectiv B_1, C_1. Să se arate că tangentele la $\mathcal{C}(O, r)$ în A_1 și C_1 se intersectează pe BN.

154. Fie $[KL]$ diametru în $\mathcal{C}(O, r)$, M, N pe tangenta în K la $\mathcal{C}(O, r)$ astfel încît M este între K și N și $|KM| \equiv |MN|$. Dreapta NL intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în P. Să se arate că dreapta MP este tangentă la cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

155. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt tangente exterior în K. Fie A și B două puncte situate pe tangenta în K la cercuri, A și B separate de K. Tangentele din A și B la cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în C și D. Să se arate că patrulaterul $ACBD$ este circumscriptibil.

156. Să se arate că perpendicularele, duse din mijloacele laturilor unui triunghi pe tangentele la cercul circumscris ce trec prin vîrfurile opuse acestor laturi, sînt concurente.

157. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în $\mathcal{C}(O, r)$ și $\|AD\| \cdot \|BC\| = \|AB\| \cdot \|CD\|$ ($[AD]$ și $[BC]$ sînt laturi opuse). Să se arate că tangentele la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în A și C(B și D) se intersectează pe BD(AC) sau sînt paralele cu BD și reciproc.

158. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. O paralelă la BC intersectează pe $[AB]$ în M, pe $[AC]$ în N, iar cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în P și Q. Dacă S este punctul de intersecție al tangentei în A la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ cu MN, să se arate că $\|SM\| \cdot \|SN\| = \|SP\| \cdot \|SQ\|$.

159. $\mathcal{C}(O_1, r_1) \cap \mathcal{C}(O_2, r_2) = \{A, B\}$, $C \in [AB]$ oarecare, iar $[MN]$ este coardă în $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $[PQ]$ coardă în $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, astfel încît $[MN] \cap [PQ] = \{C\}$. Dacă $[MN]$ este cea mai mică coardă în $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $[PQ]$ este cea mai mică coardă în $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ (cu proprietatea că trec prin C) atunci $MPNQ$ este dreptunghi.

160. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, R)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$ sînt tangente exterior în M. Fie $N \in \mathcal{C}(O_2, r)$ astfel încît $[MN]$ este diametru în $\mathcal{C}(O_2, r)$. Notăm cu d tangenta la cercul $\mathcal{C}(O_2, r)$ în N. Să se determine razele celor trei cercuri tangente la d și tangente cercurilor $\mathcal{C}(O_1, R)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$.

Scanned with OKEN Scanner

161. Să se demonstreze că în orice triunghi raportul între raza cercului înscris și raza cercului circumscris triunghiului este mai mic sau egal cu $\frac{1}{2}$.

162. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, iar E punctul de intersecție a coardelor $[AD]$ și $[BC]$. Să se arate că $\|AE\| \cdot \|AD\| + \|BE\| \cdot \|BC\| = \|AB\|^2$.

163. În triunghiul ABC înălțimea CC_1 este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că: 1) $m(\hat{A}) = 90 + m(\hat{B})$; 2) $\|CC_1\|^2 = \|BC_1\| \cdot \|AC_1\|$.

164. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc. Dreapta ce trece prin B și este paralelă cu tangenta în A la cerc intersectează pe AC în D. Să se arate că $\|AB\|^2 = \|AC\| \cdot \|AD\|$.

165. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt tangente exterior. Să se arate că

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{d},$$

unde d este distanța de la punctul de tangentă al cercurilor la una din tangentele comune.

166. Două cercuri sînt tangente exterior în A. Tangenta comună BC intersectează linia centrelor în S. Dreptele AB și AC intersectează perpendiculara în S pe BC în punctele P și Q. Să se arate că $|SP| \equiv |SQ|$.

167. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD}$. Să se arate că $\|AC\|^2 = \|AB\| \cdot (\|AB\| + \|AD\|)$.

168. Cercurile $\mathcal{C}(O, r)$, $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, R)$ sînt două cîte două tangente exterior. Să se determine lungimea coardei $[AB]$ a cercului $\mathcal{C}(O_2, R)$ știind că dreapta AB este tangenta comună interioară a cercurilor $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$.

169. Din punctul C exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se duc tangentele AC și BC, A și B fiind punctele de tangență. Considerăm $M \in \mathcal{C}(O, r)$ oarecare, și fie N, D și E picioarele perpendicularelor duse din M pe AB, și respectiv pe AC și BC. Să se arate că $\|MN\|^2 = \|DM\| \cdot \|ME\|$.

170. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, a)$ și $\mathcal{C}(O_2, b)$ sînt tangente exterior și sînt tangente interior cercului $\mathcal{C}(O, a + b)$. Să se determine raza unui cerc tangent celor trei cercuri.

171. Fie $\mathcal{C}(O_1, r) \cap \mathcal{C}(O_2, r) = \{O, A_3\}$, $\mathcal{C}(O_2, r) \cap \mathcal{C}(O_3, r) = \{O, A_1\}$, $\mathcal{C}(O_1, r) \cap \mathcal{C}(O_3, r) = \{O, A_2\}$. Să se arate că dreptele O_1A_1, O_2A_2 și O_3A_3 sînt concurente.

172. Din punctul A exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se duc tangentele AB și AC, B și C fiind punctele de tangență, astfel că unghiul $\widehat{BAC}$ este obtuz. O tangentă la cerc într-un punct K intersectează pe AB și AC în M și respectiv N. Să se arate că $\frac{\|AB\| + \|AC\|}{3} \leqslant \|MN\| < \frac{\|AB\| + \|AC\|}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

173. Din punctul S exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se duc tangentele ST_1, ST_2, $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, r)$. Fie $M \in |T_1T_2|$ oarecare. Perpendiculara în M pe MO intersectează pe ST_1 în K și pe ST_2 în L. Să se arate că M este mijlocul segmentului $|KL|$.

174. Diametrul perpendicular pe coarda $|MN|$ o intersectează în A. Coarda $|BC|$ intersectează coarda $|MN|$ în D. Să se arate că numărul $\|AD\|^2 + \|BD\| \cdot \|CD\|$ nu depinde de poziția punctului D.

175. Fie $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$, $M \neq O$ și $|AB|$ o coardă astfel încît $M \in |AB|$. Tangentele la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în A și B se intersectează în S și fie $m = d(M, AS)$, $n = d(M, BS)$. Să se arate că $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ nu depinde de poziția coardei $|AB|$. Dacă $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ să se arate că $\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$ nu depinde de poziția coardei $|AB|$.

176. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că tangentele la $\mathcal{C}(O, r)$ în B și D se intersectează pe AC sau sînt paralele cu AC dacă și numai dacă tangentele la $\mathcal{C}(O, r)$ în A și C se intersectează pe BD sau sînt paralele cu BD.

177. Fie ABC un unghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că pentru orice punct $M \in \overset{\frown}{BC}$ avem $\|MA\| = \|MB\| + \|MC\|$.

178. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sînt tangente exterior în C. O dreaptă tangentă cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ le intersectează în A și respectiv în B. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC.

179. Fie ABC un triunghi echilateral. Notăm cu D, E și F mijloacele laturilor $|BC|$, respectiv $|AC|$ și $|AB|$. Să se arate că dreapta DF este tangentă cercului circumscris triunghiului CDE.

180. Fie $ABCD$ un pătrat, E mijlocul laturii $|CD|$, F mijlocul laturii $|AD|$, G intersecția diagonalelor pătratului. Fie d tangenta la $\mathcal{C}(E, a)$ în punctul diametral opus lui G și f tangenta la $\mathcal{C}(F, a)$ în punctul diametral opus lui G, $2a$ fiind lungimea laturii pătratului $ABCD$. Să se determine razele cercurilor tangente la d și f și cercurilor $\mathcal{C}(E, a)$, $\mathcal{C}(F, a)$.

181. În triunghiul ascuțitunghic ABC fie înălțimile $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$, iar M, N, P, Q, R, S picioarele perpendicularelor duse din A_1, B_1, C_1 pe laturile triunghiului. Să se demonstreze că hexagonul cu vîrfurile M, N, P, Q, R, S este inscriptibil și are trei laturi paralele cu laturile triunghiului.

182. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, R)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$, $R > r$ sînt tangente interior. Să se determine raza cercului tangent cercurilor $\mathcal{C}(O_1, R)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$ și tangent dreptei O_1O_2.

183. Fie $A, B \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $AB \cap \mathcal{C}(O, r) = \emptyset$. Fie $C, D \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît AC și BD să fie tangente la $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că

$$|\|AC\| - \|BD\|| < \|AB\| < \|AC\| + \|BD\|.$$

Dacă $AB \cap \mathcal{C}(O, r) \neq \emptyset$ să se arate că cel puțin una dintre inegalitățile de mai sus nu este valabilă.

Scanned with OKEN Scanner

184. Fie ABC un triunghi, $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$, $C' \in |AB|$. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'A'$, $BC'A'$ și $CA'B'$ se intersectează într-un singur punct.

185. Într-un triunghi este înscris un pătrat astfel încît o latură a pătratului este inclusă în latura triunghiului cea mai mare. Să se arate că $\sqrt{2r} < a < 2r$, unde r este raza cercului înscris în triunghi, iar a este lungimea laturii pătratului.

186. Fie ABC un triunghi. Perpendicularele în B pe AB și în C pe AC se intersectează în D. Perpendiculara din C pe AD intersectează dreapta AB în E. Să se arate că $\triangle ACE \sim \triangle ABC$.

187. Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este tangent exterior cercului $\mathcal{C}(O', r')$ în A și cercului $\mathcal{C}(O'', r'')$ în B, iar $\mathcal{C}(O', r') \cap \mathcal{C}(O'', r'') = \emptyset$. Notăm $\{C\} = |O'O''| \cap \cap \mathcal{C}(O', r')$ și $D = |O'O''| \cap \mathcal{C}(O'', r'')$. Să se arate că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil.

188. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic oarecare, $|AD|$, $|BE|$, $|CF|$ înălțimile, iar H ortocentrul. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}(\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2) = \|AD\| \, \|AH\| + \|BE\| \, \|BH\| + \\ + \|CF\| \, \|CH\|.$$

Cum se scrie relația dacă triunghiul este optuzunghic?

189. Fie un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și $[AB]$ un diametru. Să consideră un punct M pe semidreapta $|OA$ astfel ca $\|OM\| > r$ și MT o tangentă la cercul dat, T fiind punctul de tangență. Dacă N este proiecția lui T pe AB să se arate că $\|OM\|$, $\|MT\|$ și $\|MN\|$ reprezintă media aritmetică, media geometrică, respectiv media armonică a lui $\|AM\|$ și $\|BM\|$. Să se dea o interpretare geometrică a relațiilor dintre aceste medii.

190. Într-un pătrat de latură 1 se consideră $2n^2 + 1$ puncte. Arătați că există un cerc de rază $\frac{1}{n}$ care să conțină trei dintre aceste puncte.

191. Fie $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $m(\widehat{AOB}) = 13$. Folosind compasul și linia negradată, împărțiți arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ în 13 arce congruente.

192. În triunghiul ascuțitunghic ABC se consideră înălțimea $[AD]$ și bisectoarele $[AE]$, $[AF]$, $[BM]$ și $[CN]$ ale unghiurilor $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAC}$, $\widehat{ABC}$ și $\widehat{BCA}$. Notăm $\{S\} = AE \cap CN$, $\{T\} = AE \cap BM$, $\{V\} = AF \cap BM$, $\{U\} = AF \cap CN$. Să se arate că:

1) Patrulaterul $STUV$ este inscriptibil;

2) $\|ST\| + \|VU\| > \|SV\|$.

193. Fie M un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC și P un punct în plan. Cercurile circumscrise triunghiurilor MPB și MPC mai intersectează BC în B_1 și C_1, dreapta PB_1 intersectează AC în B', iar dreapta PC_1 intersectează AB în C'. Arătați că punctele A, M, P, B' și C' sînt pe un cerc și discutați cazurile particulare după poziția punctelor P și M.

(O_2, r)

194. În triunghiul ABC considerăm punctele $B' \in |AC|$ și $C' \in |AB|$. Cercul circumscris triunghiului $AB'C'$ mai intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, $BB'C$, $BC'C$ în punctele P, Q, R.

1) Să se arate că AP, $B'Q$ și $C'R$ sînt concurente într-un punct situat pe BC sau sînt paralele cu BC.

2) Dreptele BQ, CR și paralela din A la BC sînt concurente într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului $AB'C'$.

195. Se consideră trei cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ și $\mathcal{C}(O_3, r_3)$ care sînt tangente două cîte două. Se cere să se găsească raportul între suma lungimilor acestor cercuri și perimetrul triunghiului format de centrele lor.

196. Pe dreapta d se consideră punctele O, O_1, O_2 astfel că O este mijlocul segmentului $|O_1O_2|$ și avem $\|OO_1\| = \|OO_2\| = r$. Se consideră cele trei semicercuri cu centrele în O, O_1 respectiv O_2 și de raze $2r$, r, respectiv r, situate de aceeași parte a dreptei d. Să se determine raza cercului tangent celor trei semicercuri.

197. Se dă un triunghi echilateral BCD înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Tangentele la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în B și C se întîlnesc în A. Fie P un punct oarecare pe cerc. Să se arate proiecțiile segmentului $|AO|$ pe dreptele BP și CP sînt congruente cu segmentele $|CP|$, respectiv $|BP|$.

198. Se consideră cercurile fixe tangente exterior $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$. Cercul $\mathcal{C}(O, R)$ de centru și de rază variabilă este tangent exterior cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ în punctele A și B. Știind că $R_2 \neq R_1$ să se arate că dreapta AB trece printr-un punct fix.

199. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se arate că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ACD, ABD și BCD sînt vîrfurile unui dreptunghi.

200. În triunghiul ABC bisectoarea interioară unghiului $\hat{A}$ intersectează latura $|BC|$ în D. Fie O, O_1, O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv ABD și ACD. Să se arate că $\|OO_1\| = \|OO_2\| = \dfrac{aR}{b+c}$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar $a = \|BC\|$, $b = \|AC\|$, $c = \|AB\|$.

201. Cercurile construite pe laturile unui patrulater convex ca diametri trec printr-un același punct dacă și numai dacă patrulaterul este ortodiagonal.

202. Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este înscris în triunghiul ABC. Fie $D \in |BC|$, $E \in |AC|$ și $F \in |AB|$ punctele de tangență iar A_1 și B_1 picioarele perpendicularelor din A și respectiv B pe BO și respectiv pe AO. Să se arate că punctele A_1, B_1, D și E sînt coliniare.

203. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor II_aI_b, II_bI_c, II_cI_a sînt congruente.

204. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $AB \cap CD = \{E\}$, $AD \cap BC = \{F\}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $|AC|$, $|BD|$, $|EF|$ (diagonalele patrulaterului complet) sînt coliniare (dreapta *Newton-Gauss*).

Scanned with OKEN Scanner

205. Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este înscris în triunghiul ABC. Fie $K, L \in |AB|$, $M, N \in |BC|$ și $Q, R \in |AC|$ astfel încît dreptele LM, NR, QK să fie tangente la $\mathcal{C}(O, r)$. Să se arate că suma perimetrelor triunghiurilor AKQ, BML, CRN este egală cu perimetrul triunghiului ABC.

206. Într-un triunghi ABC avem $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 2m(\hat{B})$. Să se arate că $|IO| \equiv |IH|$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC, iar I și O sînt centrele cercurilor înscris și respectiv circumscris triunghiului ABC.

207. Fie $A \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$, $A \neq O$. O dreaptă variabilă ce trece prin A intersectează cercul în K și L. Tangentele la cerc în punctele K și L se intersectează în M. Să se afle locul geometric al punctului M.

208. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$, E punctul de intersecție al diagonalelor, $|FG|$ o coardă în $\mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $E \in |FG|$ și $|FE| \equiv |EG|$. Fie K și L punctele de intersecție ale coardei cu laturile patrulaterului. Să se arate că $|FK| \equiv |LG|$.

209. Pe laturile $|AB|$, $|AC|$ ale triunghiului ABC se iau punctele M, respectiv N, astfel încît patrulaterul $BMNC$ să fie inscriptibil. Perpendicularele în M, N pe AB, respectiv AC se taie în S. Să se arate că cercurile $AMSN$ și $BMNC$ sînt ortogonale dacă și numai dacă $|BC|$ este diametrul cercului $BMNC$.

210. Să se demonstreze că în orice triunghi raza cercului circumscris R și raza cercului înscris r sînt legate de distanța l între centrele acestor cercuri prin relația $l^2 = R^2 - 2Rr$ (relația lui *Euler*).

211. Unui triunghi i se asociază trei numere: R_0 raza cercului circumscris, R_1 raza celui mai mic cerc ce conține în interiorul său interiorul triunghiului și R_{min} care este cel mai mic număr real R cu proprietatea că cele trei discuri de rază R avînd centrele în vîrfurile triunghiului acoperă interiorul triunghiului. Să se arate că dacă două dintre cele trei numere R_0, R_1, R_{min} sînt egale atunci toate sînt egale.

212. Patru drepte se intersectează în șase puncte care sînt vîrfurile a patru triunghiuri. Arătați că cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun.

213. Fie un cerc de diametru $[AB]$ și $[MN]$ o coardă (M și N de o parte și de alta a lui AB). Perpendiculara din B pe MN intersectează dreptele AM și AN respectiv în P și R; BN intersectează perpendiculara în A pe AB în S, iar BM pe AS în T.

1) Să se arate că AS trece prin centrul cercului circumscris triunghiului APR.

2) Patrulaterele $BSPA$, $BRAT$, $STMN$ sînt inscriptibile.

3) Dacă O_1 și O_2 sînt respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiului APR și patrulaterului $MNST$, atunci $O_1O_2 \perp ST$.

214. Fiind dat un triunghi ABC astfel că $\|BC\| = a$, $\|AC\| = b$, $\|AB\| = c$ și M un punct în planul său, să se demonstreze că

$$\|MA\|^4 + \|MB\|^4 + \|MC\|^4 \geq \frac{a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

215. Punctul M este centrul de simetrie al figurii formate de cercurile $\mathcal{C}(O_1, r)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$. Prin translația care transformă pe $\mathcal{C}(O_1, r)$ în $\mathcal{C}(O_2, r)$

Scanned with OKEN Scanner

punctul $A_1 \in \mathcal{C}(O_1, r)$ trece în $A_2 \in \mathcal{C}(O_2, r)$. Arătați că punctul B_1, simetricul punctului A_2 în raport cu M, este diametral opus punctului A_1.

216. Trei cercuri congruente au un punct comun. Arătați că celelalte puncte de intersecție ale acestor cercuri sînt situate pe un cerc congruent cu cercurile date (Teorema lui *Țițeica*).

217. Arătați că dacă dreapta care trece prin mijloacele bazelor unui trapez formează cu laturile neparalele ale trapezului unghiuri congruente, atunci trapezul este isoscel.

218. Să se construiască un patrulater convex $ABCD$ cunoscîndu-i lungimile laturilor și lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor $|AB|$ și $|CD|$.

219. Fie O un punct fixat în planul $\mathcal{P}$ și k un număr real nenul. Se consideră o aplicație $F: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care aplică O în O și un punct oarecare A în punctul $A' = F(A)$ situat pe dreapta OA astfel încît:

a) dacă $k > 0$, A' este pe semidreapta $|OA$, iar dacă $k < 0$, punctul O este situat între A și A';

b) $\|OA'\| = |k| \cdot \|OA\|$.

(O astfel de aplicație se numește *omotetie în planul $\mathcal{P}$ de centrul O și raport k.*)

Să se arate că: 1) F aplică trei puncte coliniare în trei puncte coliniare;

2) F aplică o dreaptă d care nu trece prin O într-o dreaptă $d' = F(d)$ paralelă cu d;

3) Dacă $|AB|$ este segment, $A \neq B$ și dacă se notează $A' = F(A)$, $B' = F(B)$ avem $A' \neq B'$ și $\|A'B'\| = |k| \cdot \|AB\|$;

4) Dacă $\mathcal{C}(I, r)$ este un cerc, transformatul său este un cerc $\mathcal{C}'(I', r')$, astfel că punctele I, I' și O sînt coliniare, iar $r' = |k|r$.

220. Să se arate că fiind date două cercuri $\mathcal{C}(I, r)$ și $\mathcal{C}'(I', r')$ există în general două omotetii care să aplice unul în celălalt.

221. Fie M, N și P centrele de greutate ale triunghiului ABC, ABD și ABE respectiv. Arătați că punctele C, D și E sînt coliniare dacă și numai dacă punctele M, N și P sînt coliniare.

222. Fie O intersecția diagonalelor trapezului $ABCD$ $(AB \| CD)$, A' și B' puncte simetrice cu punctele A, respectiv B în raport cu bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{AOB}$. Arătați că $\widehat{ACA'} \equiv \widehat{BDB'}$.

223. Fie ABC un triunghi oarecare și A', B' respectiv C' mijloacele laturilor sale. Să se arate că centrul de greutate G, centrul cercului înscris I și centrul cercului înscris I' al triunghiului $A'B'C'$ sînt trei puncte coliniare. Mai mult avem $\|GI\| = 2\|GI'\|$.

224. Fie F_i omotetia de centru O_i și raport $k_i (i = 1, 2, 3)$. Să se găsească o dreaptă d care se transformă prin cele trei omotetii date în aceeași dreaptă d'.

225. Fie k un număr real nenul și O un punct fixat în planul $\mathcal{P}$. Se consideră o aplicație $F: \mathcal{P} \setminus \{O\} \to \mathcal{P} \setminus \{O\}$ care aplică punctul A în punctul $A' = F(A)$ situat pe dreapta OA astfel încît:

a) dacă $k > 0$, A' este pe semidreapta $|OA$, iar dacă $k < 0$, punctul O este între A și A';

b) $\|OA\| \cdot \|OA'\| = |k|$.

(O astfel de aplicație se numește *inversiune în planul $\mathcal{P}$ de centru O și putere k.*)

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

1) F aplică un cerc care trece prin O într-o dreaptă perpendiculară pe dreapta determinată de centrul cercului și punctul O;

2) F aplică un cerc care nu trece prin O într-un cerc care nu trece prin O;

3) Pentru orice $A, B \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ avem

$$\| A'B' \| = \frac{|k| \cdot \| AB \|}{\| OA \| \cdot \| OB \|}.$$

226. Să se demonstreze că:

1) compunerea a două inversiuni de același centru este o omotetie;

2) compunerea unei inversiuni cu o omotetie de același centru este o inversiune.

Să se precizeze în fiecare caz centrul și raportul, respectiv puterea.

227. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze cu ajutorul inversiunii inegalitatea lui *Ptolomeu*:

$$\| AB \| \cdot \| CD \| + \| BC \| \cdot \| AD \| \geq \| AC \| \cdot \| BD \|.$$

228. Se consideră în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ un diametru $|AB|$ și pe tangenta în A la cercul dat punctele variabile P și Q cu proprietatea că produsul $\| AP \| \cdot \| AQ \|$ este constant.

Să se arate că:

1) Dreapta $P'Q'$ trece printr-un punct fix, P' și Q' fiind punctele unde PB, respectiv QB intersectează a doua oară cercul dat;

2) Dreapta $P''Q''$ trece printr-un punct fix, P'' și Q'' fiind punctele de tangență ale cercului dat cu celelalte două tangente care se mai pot duce din P și Q.

229. Se dau două cercuri tangente exterioare $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$. Fie d una din tangentele comune ale celor două cercuri. Să se construiască un cerc tangent celor două cercuri date și tangent dreptei d.

230. Se dau două puncte A și B și un cerc $\mathcal{C}(O, r)$. Se cere:

1) Să se construiască un cerc care să fie tangent cercului dat și să treacă prin punctele A și B;

2) Să se construiască un cerc care să fie ortogonal cercului dat și să treacă prin A și B.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

1. Fie $A(a, b)$ un punct fix și M un punct mobil de abscisă c.

1) Aflați locul geometric al mijlocului segmentului $|AM|$;

2) Aflați locul geometric al simetricului lui A față de M;

3) Aflați locul geometric al simetricului lui M față de A.

2. Considerăm punctul $M_1(a, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Notăm cu M_2 simetricul lui M_1 față de Ox, M_3 simetricul lui M_1 față de Oy și M_4 simetricul lui M_1 față de O.

1) Care sînt coordonatele punctelor M_2, M_3, M_4?

2) Ce fel de patrulater este $M_1M_2M_4M_3$?

3) Găsiți o condiție ca $M_1M_2M_4M_3$ să fie pătrat.

3. Aflați punctul de pe dreapta de ecuație $y = 4$ aflat la egală distanță de punctele $A(2, 7)$ și $B(9, 8)$.

4. Considerăm dreptele de ecuații

$$2\sqrt{3}\,x - 2y + 3 = 0$$

$$x + y + \sqrt{3} = 0.$$

1) Aflați măsurile unghiurilor pe care aceste drepte le formează cu axa Ox.

2) Aflați măsura unghiului ascuțit al celor două drepte.

5. Se dau punctele $M(0, -1)$, $N(-2, 1)$, $P(1, 4)$. Aflați coordonatele punctelor A, B, C știind că M, N, P sînt mijloacele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$.

6. Se dau punctele $O(0, 0)$, $A(2, 1)$ și $B(0, 3)$. Aflați coordonatele pe care le poate avea punctul C astfel încît O, A, B, C să fie vîrfurile unui paralelogram.

7. Demonstrați că dacă trei dintre vîrfurile unui paralelogram au coordonatele întregi (respectiv raționale) atunci și al patrulea vîrf are coordonatele întregi (raționale).

8. Considerăm mulțimea C a dreptelor de ecuație

$$x + my + m - 3 = 0$$

unde m este un parametru real.

1) Demonstrați că toate dreptele din D trec printr-un punct fix;

2) Determinați dreapta din mulțimea D care trece prin originea O a sistemului de coordonate;

3) Determinați dreapta din mulțimea D care trece prin punctul $A(1, 1)$;

4) Determinați dreapta din mulțimea D paralelă cu prima bisectoare;

5) Determinați dreapta din mulțimea D paralelă cu Oy;

6) Există în mulțimea D o dreaptă paralelă cu Ox?

Scanned with OKEN Scanner

9. Considerăm două cercuri avînd centrele în $O_1(-2, -4)$ și respectiv $O_2(13,4)$. Primul cerc are raza egală cu 10. Aflați raza celui de-al doilea cerc astfel încît cercurile să fie:

1) tangente exterioare;
2) tangente interioare.

10. Notăm cu $\mathcal{C}_1$ cercul cu centrul în $A(1, 0)$ și trecînd prin punctul $B(4, 4)$ iar cu $\mathcal{C}_2$ cercul cu centrul în $D(10, 12)$ și trecînd prin punctul $E(6, 15)$.

1) Determinați poziția relativă a celor două cercuri;
2) Determinați punctele de intersecție ale cercului $\mathcal{C}_1$ cu axa Ox și cu axa Oy.
3) Dacă M este un punct mobil pe $\mathcal{C}_1$ iar N este un punct mobil pe $\mathcal{C}_2$, aflați maximul și minimul distanței dintre M și N.

11. Fie punctele A (4, 2), B (—2,4), C(—4, —2) și D(2, —4).

1) Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este un pătrat.
2) Scrieți ecuația cercului circumscris acestui pătrat.

12. Fie A, B, C, D patru puncte în plan. Notăm cu M, N, P, Q, S, T respectiv mijloacele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$, $|AC|$ și $|BD|$. Demonstrați că dreptele MP, NQ și ST sînt concurente.

13. Se dau punctele $A(2, 1)$, $A'(6, 3)$ și $B(1,3)$. Determinați coordonatele unui punct B' astfel încît triunghiul AOB să fie asemenea cu triunghiul $A'OB'$. Soluția este unică?

14. Considerăm punctele $A(3, 5)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 5)$, $A'(5, -1)$, $B'(3, 1)$ și $C'(2, m)$. Aflați valoarea lui m știind că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea.

15. Demonstrați că dacă două dintre vîrfurile unui triunghi echilateral au coordonatele întregi, atunci al treilea vîrf nu poate avea coordonatele întregi.

16. Se consideră punctele coliniare $A_1, A_2, \ldots, A_n$ astfel încît $d(A_1, A_2) = d(A_2, A_3) = \ldots = d(A_{n-1}, A_n) = d(A_n, A_1)$.

1) Demonstrați că dacă n este impar punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coincid.
2) Rămîne adevărată proprietatea dacă n este par?

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

FUNCȚII TRIGONOMETRICE

1. Determinați semnul fiecăruia din numerele:

1) $\sin \frac{75\pi}{11}$; 2) $\cos \frac{105\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{347\pi}{9}$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{492\pi}{7}$; 5) $\sin\left(-\frac{549\pi}{5}\right)$; 6) $\cos 49$;

7) $\operatorname{tg} 25$; 8) $\sin 340$; 9) $\operatorname{ctg}(-39)$.

2. Determinați partea întreagă a numerelor:

1) $\sin \frac{13\pi}{12}$; 2) $\cos \frac{79\pi}{13}$; 3) $\sin 45$; 4) $\sin 50$; 5) $\cos\pi^2$.

3. Determinați semnul numerelor:

1) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$; 2) $\sin \frac{25\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{7}$;

3) $\sin 2 - \sin 2{,}15$; 4) $\cos 6 - \cos 5$.

4. Demonstrați că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = 4$.

5. Calculați $\dfrac{\sin \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}}$.

6. Cunoscînd că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7}$ calculați:

$$\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{7 \sin^2\alpha + 5 \cos^2\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

7. $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt unghiurile unui triunghi. Cunoscînd că $\sin A = \frac{5}{13}$ și $\sin B = \frac{3}{5}$ precizați valorile pe care le poate avea $\cos C$.

8. Cunoscînd că α este măsura unui unghi ascuțit și $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, aflați $\cos \alpha$.

9. Se consideră funcțiile f, g, h definite prin formulele

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad g(x) = \operatorname{ctg}^2 3x; \quad h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Pentru fiecare funcție stabiliți domeniul maxim de definiție și perioada principală; studiați paritatea funcțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

10. Reprezentați grafic funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_1(x) = 3 \sin x; \quad f_2(x) = -\sin 2x; \quad f_3(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$f_4(x) = 2 + \cos x; \quad f_5(x) = \cos x - \sin x.$$

11. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f(x) = \sin x + |\sin x|;$$

$$g(x) = \cos x - |\cos x|.$$

1) Demonstrați că f și g admit perioada 2π;
2) Demonstrați că g este pară, iar f nu este nici pară nici impară;
3) Reprezentați grafic funcțiile;
4) Aflați valorile lui x pentru care $f(x) = g(x)$.

12. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to [0, 1]$ definite prin

$$f(x) = \sin^2 x; \quad g(x) = \cos^2 x.$$

1) Stabiliți perioada principală a funcțiilor;
2) Reprezentați grafic funcțiile.

13. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice avînd perioada principală T.

1) Demonstrați că T este perioadă și pentru funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin formula $h(x) = f(x)\, g(x)$;

2) Putem afirma că T este perioada principală a funcției h?

14. 1) Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcții periodice avînd respectiv perioada $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x).$$

Demonstrați că dacă există un număr real T și niște numere naturale $m_1, m_2, \ldots, m_n$ astfel încît $T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_n T_n$ (adică T este un multiplu comun al perioadelor $T_1, T_2, \ldots, T_n$) atunci T este o perioadă a funcției f.

2) Indicați o perioadă a funcției

$$f(x) = 3 \sin 6x - 2 \cos 9x + 0{,}15 \sin 15x$$

mai mică decît 2π.

15. Demonstrați că nu există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \leqslant 3.$$

16. Demonstrați că dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ și $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, atunci

$$\left(a + \frac{b}{\sin \alpha}\right)\left(b + \frac{a}{\cos \alpha}\right) > a^2 + b^2 + 3ab.$$

17. Calculați

$$\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 3^\circ \ldots \operatorname{tg} 88^\circ \operatorname{tg} 89^\circ.$$

Scanned with OKEN Scanner

18. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$$

19. Aflați domeniul maxim de definiție pentru funcțiile f_1, f_2, f_3, f_4 definite prin formulele

$f_1(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$; $f_2(x) = \operatorname{ctg}(\sin x)$; $f_3(x) = \operatorname{tg}(\cos x)$; $f_4(x) = \operatorname{ctg}(\cos x)$.

20. Demonstrați că pentru orice x real avem

$$\sin 3x = -4 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

21. 1) Demonstrați că dacă a și b sînt numere reale astfel încît egalitatea

$$a \sin x + b \sin 2x = a \cos x + b \cos 2x$$

să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci $a = b = 0$.

2) Dacă a, b, c sînt numere reale astfel încît egalitatea

$$a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x$$

să aibă loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci $a = b = c = 0$.

22. Cunoscînd că

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos 2x}{b} = \frac{\cos 3x}{c}$$

($a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\cos x \neq 0$) demonstrați că

$$\frac{a + c}{a + b} = \frac{b}{a}.$$

23. Dacă x și y sînt numere reale astfel încît $\sin x = \sin y$ și $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ rezultă $\cos x = \cos y$?

24. Fie x și y două numere reale din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Demonstrați că egalitatea $x \cos y = y \cos x$ are loc dacă și numai dacă $x \operatorname{ctg} x = y \operatorname{ctg} y$.

25. Demonstrați că dacă $\alpha = \frac{\pi}{11}$, atunci $\frac{\cos \alpha + \cos 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = -\frac{1}{2}$.

26. Demonstrați că dacă $\cos(a + b) = 0$, atunci $\sin(a + 2b) = \sin a$.

27. Demonstrați că pentru orice x real este adevărată inegalitatea:

$$|\sin x| \leqslant |x|.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = 0$.

28. Demonstrați că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \cos x$, este injectivă.

29. Studiați monotonia funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

30. Demonstrați că pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este adevărată inegalitatea $|x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

31. Demonstrați că dacă $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, atunci:

$$\operatorname{tg}\alpha - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \beta.$$

32. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice numere naturale m și n mai mari sau egale cu 2 are loc inegalitatea

$$\sin^m x + \cos^n x \leqslant 1.$$

33. Demonstrați că dacă $\operatorname{tg}\alpha = a \operatorname{tg}\beta$ și $a > 0$, atunci:

$$\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta) \leqslant \frac{(a-1)^2}{4a}.$$

34. Demonstrați că pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem:

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

35. Demonstrați că dacă $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, atunci:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

36. 1) Fie funcția $f : \mathbf{R} \to [0, 1]$, $f(x) = |\sin x|$.
Reprezentați grafic funcția.
2) Demonstrați că perioada principală a funcției este π.
3) Fie funcția $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ având perioada T. Demonstrați că și funcția $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi(x) = |\varphi(x)|$, are perioada T.
4) Este adevărat că dacă T este perioada principală a funcției φ, atunci ea este și perioada principală a funcției ψ?

37. Reprezentați grafic funcțiile f, g, h: $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ date prin formulele:

$$f(x) = [\sin x], \quad g(x) = [\cos x], \quad h(x) = [\sin x] + [\cos x],$$

unde cu $[a]$ se notează partea întreagă a numărului real a.

38. Fie funcția f definită prin formula:

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right).$$

1) Determinați domeniul maxim de definiție și mulțimea valorilor funcției;
2) Reprezentați grafic funcția;
3) Rezolvați ecuația:

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right) = -4.$$

39. Demonstrați că următoarele funcții nu sînt periodice:
1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin x$;
2) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 \cos x$;
3) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin x^2$;
4) $l : \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, $l(x) = \frac{1}{x} \operatorname{ctg} x$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin \frac{5}{n} x \cdot \cos nx$, unde $n \in \mathbf{Z}$. Demonstrați că dacă f admite perioada 3π atunci n este un divizor al lui 15.

41. 1) Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + \cos \alpha x$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$. Demonstrați că f este periodică dacă și numai dacă $\alpha \in \mathbf{Q}$;

2) Aceeași problemă pentru funcția $g(x) = \sin \alpha x + \cos x$;

3) Stabiliți perioada principală a funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + \cos \frac{3}{5} x$.

42. Demonstrați că $\sin 40°$ este soluție a ecuației

$$8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0.$$

43. Găsiți o ecuație algebrică de gradul al treilea care să admită soluția $\sin 50°$.

44. Demonstrați că pentru orice $n \geqslant 2$ avem:

$$\sin a \sin 2a \ldots \sin na \neq 1.$$

45. Demonstrați că pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc relația:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 5.$$

46. Demonstrați că dacă $x + y + z = \pi$, atunci:

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + 4 \cos x \cos y \cos z + 1 = 0.$$

47. Demonstrați că dacă $x + y + z = (2k + 1)\pi$, atunci:

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4(-1)^k \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

48. Demonstrați că pentru orice $x \neq k \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, are loc inegalitatea:

$$\sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x \geqslant 8.$$

49. Observînd că $\sin 2 \cdot \frac{\pi}{10} = \cos 3 \cdot \frac{\pi}{10}$, calculați $\sin \frac{\pi}{10}$, $\cos \frac{\pi}{10}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$, $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$.

50. Demonstrați că $\sin 1° + \sin 35° + \sin 73° = \cos 19° + \cos 53°$.

51. Demonstrați că $\sin 1°$ și $\cos 1°$ sînt numere iraționale.

52. Demonstrați că:

a) $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$;

b) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

53. Calculați

$$S_1 = \sum_{k=1}^{7} \sin^2 \frac{k\pi}{8}; \quad S_2 = \sum_{k=1}^{7} \sin^4 \frac{k\pi}{8}.$$

54. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea:

$$\sin(\sin x) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

55. Determinați maximul și minimul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ date prin formula

$$f(x) = (3 + \sin^2 x)(4 + \cos^2 x).$$

56. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ au loc inegalitățile:

1) $\sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 x} > 2\sqrt[4]{2}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

57. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea:

$$(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg} \alpha_n)(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{ctg} \alpha_n) \geqslant n^2.$$

În ce caz are loc egalitatea?

58. 1) Determinați mulțimile

$$A = \{x \in [0, 2\pi] \mid \cos x < 0\};$$
$$B = \{x \in [0, 2\pi] \mid \cos 2x < 0\};$$
$$C = \{x \in [0, \pi] \mid \cos 3x < 0\}.$$

2) Demonstrați că $A \cap B \cap C = \varnothing$.

3) Deduceți de aici că pentru orice $x \in [0, 2\pi]$ are loc inegalitatea

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x > -2.$$

4) Arătați că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ admite perioada 2π. Stabiliți că inegalitatea de la punctul c) este adevărată pentru orice x real;

5) Demonstrați că pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ avem

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha > \frac{1}{2};$$

59. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și orice $\alpha \in \mathbf{R}$ avem

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha > \frac{1}{2}$$

și deduceți de aici inegalitatea

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha > 1 - n$$

pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ și orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$.

59. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ este adevărată inegalitatea:

$$|\sin x| + |\cos x| > |\sin 2x|.$$

Scanned with OKEN Scanner

60. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și $y \in \mathbf{R}$ sînt adevărate inegalitățile:

1) $|\sin(x \pm y)| \leqslant \sin x| + |\sin y|$;

2) $|\sin(x \pm y)| \leqslant |\cos x| + |\cos y|$.

61. Demonstrați că dacă $0 < x_k < \pi$ pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, atunci:

$$\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n.$$

62. 1) Demonstrați că dacă $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ și $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$, atunci $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) Dacă $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ și $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha < 1$, atunci $\alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

63. Aflați maximul și minimul funcțiilor

1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a \sin x + b \cos x$;

2) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$.

64. Demonstrați că pentru orice numere reale a, b și x are loc inegalitatea

$$1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant (\sin x + a \cos x)(\sin x + b \cos x).$$

65. Demonstrați că pentru orice $x \in \left(0, \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea

$$\frac{\sin(\sin x)}{x} + \frac{x}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)} < 2.$$

66. Fie funcția $f(x) = a \cos x + b \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Demonstrați că dacă există x_1 și x_2 astfel încît $x_1 - x_2 \in \mathbf{Q}^*$ și $f(x_1) = f(x_2) = 0$, atunci f este funcția nulă.

67. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_1 \cos(x + b_1) + a_2 \cos(x + b_2) + \ldots + a_n \cos(x + b_n)$. Arătați că dacă $f(0) = 0$ și există $\alpha \in \mathbf{Q}^*$ astfel încît $f(\alpha) = 0$, atunci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

68. 1) Reprezentați grafic funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to [-1, 1]$,

$$f(x) = \min(\sin x, \cos x);$$

$$g(x) = \max(\sin x, \cos x).$$

2) Calculați

$$\max_{x \in \mathbf{R}} \min(\sin x, \cos x); \quad \min_{x \in \mathbf{R}} \max(\sin x, \cos x).$$

69. Demonstrați că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reali are loc inegalitatea:

$$-\frac{n}{2} \leqslant \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \ldots + \sin x_n \cos x_1 \leqslant \frac{n}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

70. 1) Determinați mulțimea perechilor $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ pentru care

$$\sin(x + y) \geqslant \sin(x - y);$$

2) Reprezentați grafic într-un sistem de axe carteziene mulțimea găsită;

3) Aceeași problemă pentru inecuația

$$\cos(x + y) \leqslant \cos(x - y).$$

71. 1) Se consideră sumele

$$S_1 = \sin x + \sin(x + t) + \sin(x + 2t) + \ldots + \sin[x + (n - 1)t],$$
$$S_2 = \cos x + \cos(x + t) + \cos(x + 2t) + \ldots + \cos[x + (n - 1)t].$$

Scrieți sub o formă mai simplă $2S_1 \sin \frac{t}{2}$ și $2S_2 \sin \frac{t}{2}$ și deduceți de aici cîte o formulă pentru calculul lui S_1 și respectiv a lui S_2;

2) Calculați

$$S_3 = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha;$$
$$S_4 = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha;$$
$$S_5 = \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha;$$
$$S_6 = \cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha.$$

72. 1) Demonstrați că pentru orice număr natural n are loc egalitatea

$$\operatorname{tg} 2^{n+1} - \operatorname{tg} 2^n = \frac{\operatorname{tg} 2^n}{\cos 2^{n+1}};$$

2) Folosind acest rezultat calculați suma:

$$\frac{\operatorname{tg} 1}{\cos 2} + \frac{\operatorname{tg} 2}{\cos 4} + \frac{\operatorname{tg} 4}{\cos 8} + \ldots + \frac{\operatorname{tg} 2^n}{\cos 2^{n+1}}.$$

73. Aflați toate valorile numărului natural n astfel încît:

$$\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} + \ldots + \cos \frac{2n\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9}.$$

74. 1) Demonstrați că dacă $0 \leqslant x_k \leqslant \pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$, atunci:

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

2) Demonstrați că dacă $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_k \leqslant \frac{\pi}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, atunci

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n}{n} \leqslant \cos \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

75. Demonstrați că:

1) Dacă $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ și $A + B + C = \pi$, atunci:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ și $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, atunci:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

76. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are loc inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cos(a_i - a_j) \geqslant 0.$$

77. Dați exemple de numere reale x și y pentru care:

1) $\sin x = y$ dar $x \neq \arcsin y$;

2) $\cos x = y$ dar $x \neq \arccos y$;

3) $\operatorname{tg} x = y$ dar $x \neq \operatorname{arctg} y$;

4) $\operatorname{ctg} x = y$ dar $x \neq \operatorname{arcctg} y$.

78. 1) Ce condiție trebuie să îndeplinească x pentru ca egalitatea $\sin x = y$ să implice $x = \arcsin y$?

2) Ce condiție trebuie să îndeplinească x pentru ca egalitatea $\cos x = y$ să implice $x = \arccos y$?

3) Ce condiție trebuie să îndeplinească x pentru ca egalitatea $\operatorname{tg} x = y$ să implice $x = \operatorname{arctg} y$?

4) Ce condiție trebuie să îndeplinească x pentru ca egalitatea $\operatorname{ctg} x = y$ să implice $x = \operatorname{arcctg} y$?

79. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, are loc relația:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x).$$

80. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc relația:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

81. Demonstrați că:

1) Dacă $x > 0$, atunci $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$;

2) Dacă $x < 0$, atunci $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi$.

82. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, definită prin formula

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

83. Pentru ce valori ale lui a și b reali are loc egalitatea

$$\arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\pi}{2}?$$

Scanned with OKEN Scanner

84. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \left[-\frac{\pi^2}{4}, 0\right]$, astfel încît:

$$f(\sin t) = t^2 - t\pi \text{ pentru orice } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Demonstraţi că:

1) $f(x) = (\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x$;

2) f este bijectivă.

85. Determinaţi mulţimile

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \arcsin(\sin x) = x\};$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid \arcsin(\sin x) = x - 6\pi\};$$
$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid \arccos(\cos x) = x\};$$
$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid \arccos(\cos x) = x + 2\pi\};$$
$$E = \{x \in \mathbf{R} \mid \arcsin(\sin x) = \pi - x\};$$
$$F = \{x \in \mathbf{R} \mid \arccos(\cos x) = \pi - x\}.$$

86. Reprezentaţi grafic funcţiile

$$f_1(x) = \arcsin(\sin x);$$
$$f_2(x) = \arccos(\cos x);$$
$$f_3(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x);$$
$$f_4(x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x),$$

pe domeniul lor maxim de definiţie.

87. Demonstraţi că funcţia $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x - \cos$ este bijectivă şi determinaţi funcţia inversă.

88. Determinaţi inversele funcţiilor:

1) $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$;

2) $g : [\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$.

89. Demonstraţi că $\sin\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{5}{12}\right) = 0$.

90. 1) Demonstraţi că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg}(1 + x) = \operatorname{arcctg}(1 + x + x^2).$$

2) Folosind acest rezultat calculaţi suma

$$\operatorname{arcctg}(1 + 1 + 1^2) + \operatorname{arcctg}(1 + 2 + 2^2) + \ldots + \operatorname{arcctg}(1 + n + n^2).$$

91. 1) Demonstraţi că pentru orice $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ avem

$$\frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos x + 1} = 2 \cos x - 1;$$

2) Calculaţi produsul

$$\prod_{k=0}^{n} \left(2 \cos \frac{x}{2^k} - 1\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

ECUAȚII ȘI INECUAȚII TRIGONOMETRICE

1. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sin \pi x = 0$;
2) $\sin \pi x = -1$;
3) $\cos \pi x = 0$;
4) $\cos \pi x = \frac{\pi}{3}$;
5) $\operatorname{tg} x = -\sin x$;
6) $\operatorname{tg} x = \cos x$;
7) $\sin 3x = -\cos 2x$;
8) $\sin x = 2 \cos x$.

2. Cîte soluții are fiecare dintre ecuațiile:

$$\cos x = x;$$
$$\operatorname{tg} x = x?$$

3. Rezolvați ecuația $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{ctg} 6x$.

4. Rezolvați ecuațiile:

1) $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{4}$;
2) $\arcsin(\sin x) = -\frac{1}{10}$;
3) $\arcsin(\sin x) = 2$;
4) $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{6}$;
5) $\arccos(\cos x) = -1$;
6) $\arccos(\cos x) = \frac{3\pi}{4}$;
7) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{10}$;
8) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{5\pi}{6}$;
9) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{5\pi}{6}$;
10) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = 2$;
11) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = -0{,}5\sqrt{3}$.

5. Cîte soluții raționale are ecuația:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = -1?$$

6. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$;
2) $\sin x + \cos x + 1 = 3 \sin x \cos x$;
3) $5 - 7 \sin x = 2 \cos^2 x$;
4) $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$;
5) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x - \cos 2x = 0$;
6) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{13}{16}$;
7) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;
8) $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$;
9) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
10) $\sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Rezolvaţi ecuaţiile:

1) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x$;

2) $\dfrac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x} = 1.$

Sînt echivalente ecuaţiile?

8. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

9. Rezolvaţi ecuaţiile:

1) $\cos x + \sin 5x + \sin 7x = 0$;

2) $\cos x + \cos 9x + \cos 11x = 0$;

3) $\sin 12x = \sqrt{3} \sin x + \sin 10x$.

10. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \sin 2x.$$

11. Rezolvaţi ecuaţiile:

1) $\sin(\sin x) = 0$;

2) $\cos(\cos x) = 0$;

3) $\sin(\cos x) = 0$;

4) $\cos(\sin x) = 0$.

12. Demonstraţi că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc relaţia:

$$\sin(\sin x) \neq \cos(\cos x).$$

13. Rezolvaţi ecuaţiile:

1) $\sin x + \sin 11x + \sin 21x + \sin 31x = 0$;

2) $\cos x + \cos 7x + \cos 13x + \cos 19x = 0$;

3) $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$;

4) $\sin x + \sin 3x + \sin 8x + \sin 10x = 0$.

14. Aflaţi toate valorile reale ale lui x pentru care:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} = 0.$$

15. Rezolvaţi ecuaţiile:

1) $\dfrac{\sin x}{|\sin x|} = -1$; 2) $\dfrac{|\cos x|}{\cos x} = 1$; 3) $\dfrac{\sin x}{|\sin x|} = \operatorname{tg} x\,|\operatorname{ctg} x|$.

16. Demonstraţi că ecuaţia:

$$(1 - \sin x)^2 + \sin^2(1 - x) = 0,$$

nu are soluţii reale.

17. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{1}{\cos 3x \cos 4x} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

18. Aflați valoarea lui m și rezolvați ecuația:

$$\sin^2 x + m \cos x = 2m + 1,$$

știind că admite soluția $\frac{17\pi}{3}$.

19. Rezolvați ecuația:

$$\operatorname{arctg}(\sin x) = \frac{x}{2}.$$

20. Demonstrați că ecuațiile:

1) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{3}{4}$; 2) $2 |\sin x| \sin^2 \frac{x}{5} = x^2 + \frac{1}{x^2}$,

nu au soluții.

21. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sin^4 x + \cos^7 x = 1$;
2) $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$.

22. Demonstrați că ecuațiile $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ și $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}$ sînt echivalente.

23. Rezolvați ecuația:

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x \sin 4x} + \frac{\cos 5x}{\sin 4x \sin 6x} + \frac{\cos 4x}{\sin 6x \sin 8x} = 0.$$

24. Demonstrați că ecuațiile:

$$\sin x = [\sin x] \text{ și } \cos x = [\cos x]$$

sînt echivalente.

25. Rezolvați ecuațiile:

1) $\operatorname{arctg}(3 - x^2) + \operatorname{arctg} 2x = 0$; 3) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{2\pi}{3}$; 4) $\arcsin x = \arccos x$.

26. Rezolvați ecuația:

$$\frac{2 + \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg} x + 1} = p,$$

unde p este un parametru real.

27. Pentru ce valori ale lui a, ecuația:

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

are o singură soluție?

28. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 10x = 0$;
2) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos 10x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

29. Fie ecuația:

$$\frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} = m.$$

Aflați valorile lui m pentru care ecuația are soluții.

30. Aflați mulțimea tuturor valorilor parametrului α pentru care ecuația:

$$\cos(x + \alpha) + \cos(x - \alpha) = 1$$

are soluții; rezolvați în acest caz ecuația.

31. Rezolvați ecuația:

$$\cos \pi x + 2\cos(\pi^2 x) = 3.$$

32. Rezolvați ecuația:

$$3\sin^3 x + \cos^3 x = 2\sin x + \cos x.$$

33. Se consideră ecuația:

$$[\sin x] + [\cos x] = m,$$

unde m este un parametru real, iar $[\alpha]$ desemnează partea întreagă a lui α. Aflați valorile lui m pentru care ecuația are soluții și rezolvați ecuația în aceste cazuri.

34. Rezolvați ecuația:

$$[\sin x] + [\cos x] = 2^{1-|\sin x|}.$$

35. Rezolvați ecuația:

$$[\sin x] = [\operatorname{tg} x].$$

36. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sin x + \sin 3x = \sqrt{2(\cos 2x - \cos 4x)}$;

2) $\cos x + \cos 5x = \sqrt{2(\cos 4x + \cos 6x)}$.

37. 1) Determinați toate numerele reale a pentru care următoarele două ecuații sînt echivalente:

$$\sin 3x = a \sin x + (4 - 2|a|)\sin^2 x;$$
$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x.$$

2) Aceeași problemă pentru ecuațiile:

$$2\sin^2 x - (1 - a)\sin^3 x + (2a^3 - 2a - 1)\sin x = 0;$$
$$2\sin^6 x + \cos 2x = 1 + a - 2a^3 + a\cos^2 x.$$

38. Rezolvați ecuațiile:

1) $2\cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}$.

39. 1) Se consideră ecuația $\sin mx + \cos nx = 2$ unde m și n sînt parametri întregi. Găsiți condiția necesară și suficientă ca ecuația să aibă soluții.

2) Rezolvați ecuația $\sin 26x + \cos 40x = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Aflați perechile de numere reale $(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu proprietatea că:

$$(1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(1 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) = 9.$$

41. Aflați mulțimea perechilor $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ pentru care:

$$m \sin x + n \cos y = m + n,$$

unde m și n sînt parametri reali cu proprietatea $mn > 0$.

42. Aflați mulțimea perechilor de numere reale x și y pentru care

$$|\sin(x \pm y)| = |\cos x| + |\cos y|.$$

43. Determinați toate perechile de numere reale x și y care satisfac ecuația:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y).$$

44. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = -1. \end{cases}$$

45. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \sin(x + y) + \sin(x - y) = a \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = b \end{cases}$$

unde a și b sînt parametri reali. Aflați mulțimea perechilor $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ pentru care sistemul are soluții și rezolvați-l în acest caz.

46. Rezolvați sistemele:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x = \cos y \\ x - y = \dfrac{17\pi}{6}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x = \operatorname{tg} y \\ \operatorname{tg} x = \sin y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \cos x = \operatorname{ctg} y \\ \operatorname{ctg} x = \cos y. \end{cases}$

47. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

48. Demonstrați că sistemul:

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2 \\ \cos x_2 = x_3 \\ \vdots \\ \cos x_n = x_1 \end{cases}$$

cu $n \in \mathbf{N}$ impar, are soluție unică.

49. Demonstrați că dacă:

$$\cos x = y \text{ și } \cos y = x,$$

atunci $x > 0$, $y > 0$ și $x = y$.

Scanned with OKEN Scanner

50. Rezolvați inecuațiile trigonometrice:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant \sin x$;

2) $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$;

3) $\sin x \cos x > 0$;

4) $\operatorname{tg} x \leqslant \operatorname{ctg} x$.

51. Considerăm ecuația de gradul al doilea în x:

$$x^2 - 2(\sin \varphi - \cos \varphi)x + \cos 2\varphi = 0.$$

Aflați valorile parametrului φ pentru care ecuația are:

1) două soluții reale distincte;
2) soluții reale egale;
3) soluții complexe.

52. Rezolvați ecuațiile:

1) $\max(\sin x, \cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\min(\sin x, \cos x) = -\frac{1}{2}$;

3) $\min(\sin x, \cos x) = \frac{\pi}{4}$.

53. Rezolvați inecuația $\frac{2|\sin x|}{2 - \cos^2 x} < 1$.

54. Rezolvați inecuațiile:

1) $\arcsin x > -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arccos x \leqslant \frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{2}$.

55. Rezolvați inecuațiile:

1) $\arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$;

2) $\arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2} \leqslant 0$;

3) $\arccos \frac{2x}{x^2 + 1} > \frac{\pi}{2}$;

4) $\arccos(x + 1) > \frac{\pi}{12}$.

56. Rezolvați inecuația trigonometrică:

$$2 \cos x \leqslant \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

57. Rezolvați ecuația:

$$\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{36}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{36}\right) \ldots \sin\left(x + \frac{35\pi}{36}\right) = \frac{1}{2^{36}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

ARIILE SUPRAFEȚELOR PLANE

1. Prin centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC se duce o paralelă la latura $|BC|$ care intersectează laturile $|AB|$ și $|AC|$ respectiv P și Q. Să se arate că distanța unui punct $M \in |PQ|$ la latura $|BC|$ este media aritmetică a distanțelor acestui punct la laturile $|AB|$ și $|AC|$.

2. O paralelă la latura $|BC|$ a triunghiului ABC intersectează $|AB|$ în E și $|AC|$ în F. Să se determine lungimea segmentului $|EF|$ știind că $\|BC\| = a$ și triunghiul AEF are aria egală cu aria patrulaterului $BCFE$.

3. În orice triunghi laturii mai mari îi corespunde înălțimea mai mică.

4. Să se arate că dintre toate triunghiurile înscrise într-un cerc, triunghiul echilateral are aria cea mai mare.

5. Se dă un triunghi ABC avînd lungimile laturilor a, b, c și lungimile medianelor corespunzătoare m_a, m_b, m_c. Să se arate că:

1) $\sigma[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $2p = a+b+c$ (formula lui *Heron*);

2) $\sigma[ABC] = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_a+m_c-m_b)(m_a+m_b-m_c)}$.

6. Fie D un punct pe mediana AM a triunghiului ABC și $\{E\} = BD \cap AC$, $\{F\} = CD \cap AB$. Să se arate că: 1) $EF \| BC$; 2) Triunghiurile BDF și CED au aceeași arie.

7. Laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt congruente cu medianele triunghiului ABC. Să se arate că aria triunghiului $A'B'C'$ este 3/4 din aria triunghiului ABC.

8. În triunghiul dreptunghic ABC cercul înscris este tangent ipotenuzei $|BC|$ în punctul M. Să se arate că $\sigma[ABC] = \|BM\| \cdot \|CM\|$.

9. Fie ABC un triunghi și $M \in \text{Int}ABC$. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\sigma[MBC] = \sigma[MAC] = \sigma[MAB]$.

10. Într-un triunghi ABC lungimea unei laturi este egală cu semisuma lungimilor celorlalte două laturi dacă și numai dacă dreapta care trece prin centrul cercului înscris în triunghi și prin centrul de greutate este paralelă cu o latură a triunghiului.

11. În triunghiul ABC dreapta care trece prin centrul cercului înscris și prin centrul de greutate este perpendiculară pe bisectoarea interioară unghiului $\hat{C}$ dacă și numai dacă $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$ unde $a = \|BC\|$, $b = \|AC\|$ și $c = \|AB\|$.

12. Să se determine un punct interior unui triunghi oarecare astfel încît produsul distanțelor de la acest punct la laturile triunghiului să aibă valoarea maximă.

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie ABC un triunghi și $K \in \text{Int}ABC$. Paralelele duse prin K la laturile triunghiului partiționează interiorul triunghiului în șase suprafețe poligonale dintre care trei sînt triunghiulare, ale căror arii le notăm cu S_1, S_2 și S_3. Notînd cu S aria triunghiului dat să se arate că avem:

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

14. Să se arate că aria unui triunghi ascuțitunghic este egală cu produsul dintre perimetrul triunghiului ortic și raza cercului celor nouă puncte. (Triunghiul ortic are vîrfuri picioarele înălțimilor).

15. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{C} \in 90°$) și $O \in \text{Int}ABC$ astfel încît $\sigma[OAB] = \sigma[OBC] = \sigma[OAC]$. Să se arate că

$$\| OA \|^2 + \| OB \|^2 = 5 \| OC \|^2.$$

16. Fie ABC un triunghi, $D \in |BC|$, $E \in |AC|$, $F \in |AB|$ astfel încît $DE \| AB$ și $DF \| AC$. Să se arate că aria triunghiului AFE este media geometrică a ariilor triunghiurilor DCE și FBD.

17. Fie M un punct în interiorul unui unghi $\widehat{XOY}$. O dreaptă variabilă d care trece prin M intersectează pe $|OX$ în A și pe $|OY$ în B. Să se arate că media armonică a ariilor triunghiurilor AOB și BOM este constantă.

18. Un triunghi ascuțitunghic ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Dreptele OA, BO și CO intersectează cercul în punctele A', B' respectiv C'. Să se arate că aria triunghiului dat este jumătate din aria hexagonului $AB'CA'BC'$. Dacă triunghiul ABC este optuzunghic, proprietatea mai este adevărată?

19. Fie ABC un triunghi și $M \in |AB|$, $N \in |AC|$, $P \in |MN|$ astfel încît $\frac{\| BM \|}{\| AM \|} = \frac{\| AN \|}{\| NC \|} = \frac{\| MP \|}{\| PN \|}$. Să se arate că $\sigma[BPC] = 2\sigma[AMN]$.

20. Fie ABC un triunghi și $M \in |BC|$, $N \in |BC|$, $P \in |AB|$ astfel încît $\frac{\| BM \|}{\| MC \|} = \frac{\| CN \|}{\| NA \|} = \frac{\| AP \|}{\| PB \|} = K$, $K \in \mathbf{R}$, $K \geqslant 0$, $K \neq 1$.

Notăm $\{X\} = AM \cap BN$, $\{Y\} = BN \cap CP$, $\{Z\} = AM \cap CP$. Arătați că:

$$\sigma[XYZ] = \frac{(K-1)^2}{K^2 + K + 1} \sigma[ABC].$$

21. 1) În triunghiul ABC, $|BD|$ și $|CE|$ sînt înălțimi. Să se arate că $\sigma[ABD] : \sigma[ACE] = \| AB \|^2 : \| AC \|^2$;

2) În triunghiul ABC medianele $|BD|$ și $|CE|$ se intersectează în G. Să se arate că $\sigma[ADEG] = \sigma[BCG]$.

22. Dacă se dau numerele b și c în ce condiții există un triunghi ABC astfel încît $\| AC \| = b$, $\| AB \| = c$ și înălțimea din A este congruentă cu $|BC|$?

23. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se înscrie triunghiul ABC și se consideră M mijlocul arcului $\overset{\frown}{BC}$ inclus în interiorul unghiului $\widehat{BAC}$. Să se arate că distanța lui M la una din laturile unghiului $\widehat{BAC}$ este egală cu suma distanțelor lui O la aceste laturi.

Scanned with OKEN Scanner

24. Să se găsească o dreaptă care trece printr-un punct dat M din interiorul unui unghi $\widehat{hk}$, astfel încît să determine cu laturile acestuia un triunghi de arie minimă.

25. Notînd cu S aria unui triunghi ABC și cu R, r raza cercului circumscris, respectiv raza cercului înscris să se demonstreze inegalitatea

$$S > 2r \cdot \sqrt{rR}.$$

26. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC iar x, y, z distanțele de la un punct interior triunghiului la laturi. Dacă punctul interior triunghiului este ales astfel încît $x^2 + y^2 + z^2$ să fie minimă, atunci $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

27. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea $a \geqslant 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$ unde p este semiperimetrul și a, b, c lungimile laturilor. Cînd avem egalitate?

28. 1) Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea $p^2 \geqslant 27r^2$ unde p este semiperimetrul triunghiului iar r raza cercului înscris. 2) Dacă p_1 este semiperimetrul triunghiului echilateral înscris în cercul de la punctul precedent, să se arate că avem $p \geqslant 2p_1$.

29. Să se demonstreze că pentru un triunghi dreptunghic are loc inegalitatea $R + r \geqslant \sqrt{2S}$ unde S este aria, R raza cercului circumscris și r raza cercului înscris.

30. Să se arate că suma distanțelor de la un punct situat în interiorul sau pe laturile unui triunghi la laturile triunghiului este mai mică decît lungimea celei mai mari înălțimi a triunghiului și mai mare decît lungimea celei mai mici înălțimi.

31. Dacă lungimea fiecărei laturi a unui triunghi este mai mică decît 1, atunci aria triunghiului este mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

32. 1) Se consideră toate triunghiurile din planul $\mathcal{P}$ de arie dată S și avînd două vîrfuri fixate în B și C, iar al treilea vîrf variabil în unul din semiplanele determinate de BC în planul $\mathcal{P}$. Care din aceste triunghiuri are perimetrul minim?

2) Să se arate că dintre toate triunghiurile de arie dată S, triunghiul echilateral are perimetrul minim.

3) Dacă aria unui triunghi este egală cu aria unui pătrat, atunci perimetrul triunghiului este mai mare decît perimetrul pătratului.

33. Notăm cu $\mathcal{C}(I, r)$ cercul înscris triunghiului ABC și cu D, E, F punctele de tangență cu laturile $|BC|$, $|AC|$ respectiv $|AB|$. Fie $|DK|$, $|EL|$ și $|FM|$ înălțimile triunghiului DEF. Să se demonstreze relațiile:

1) $\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[DEF]} = \frac{2R}{r}$; 2) $\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[KLM]} = \frac{4R^2}{r^2}$.

34. Fie ABC un triunghi echilateral și M, $Q \in AB$ astfel încît B este între A și M, iar A este între B și Q; K, $N \in AC$ astfel încît A este între C și K, iar C este între A și N; L, $P \in BC$ astfel încît B este între C și L, iar C este între B și P și $|AK| = |AQ| = |BL| = |BM| = |CN| = |CP| = |AB|$. Să se arate că $\sigma[KLMNPQ] = 13\sigma[ABC]$.

Scanned with OKEN Scanner

35. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie 1, $K \in |AB|$, $L \in |BC|$, $M \in |CD|$ și $N \in |AD|$ astfel încît $\frac{\|AK\|}{\|KB\|} = 2$, $\frac{\|BL\|}{\|LC\|} = \frac{1}{3}$, $\frac{\|DN\|}{\|NA\|} = \frac{1}{5}$, $\frac{\|CM\|}{\|MD\|} = 1$. Să se determine aria hexagonului $AKLCMN$.

36. În trapezul $ABCD$ punctele K și M sînt respectiv mijloacele bazelor $|AB|$ și $|CD|$. Se știe că $AM \perp DK$, $CK \perp BM$ și $m(\widehat{CKD}) = 60$. Să se determine aria trapezului știind că înălțimea sa este egală cu 1.

37. Pe prelungirile diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$ ale patrulaterului convex $ABCD$ se consideră punctele C_1 respectiv D_1 astfel încît C este mijlocul lui $|AC_1|$ și D este mijlocul lui $|BD_1|$ respectiv. Să se arate că avem $\sigma[ABC_1D_1] = 4\sigma[ABCD]$.

38. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Prin mijlocul M al diagonalei $|AC|$ se duce o paralelă d la BD și prin mijlocul N al diagonalei $|BD|$ se duce o paralelă d' la AC. Notînd $\{O\} = d \cap d'$, să se arate că segmentele care unesc mijloacele laturilor patrulaterului dat cu punctul O determină o descompunere a patrulaterului în patrulatere de arii egale.

39. Se dau cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', r)$. Să se calculeze aria patrulaterului determinat de punctele de tangență ale cercurilor cu cele două tangente comune exterioare atunci cînd se știe distanța d dintre cele două centre. Să se dea formula ariei în cazurile cînd cercurile sînt tangente și cînd sînt ortogonale.

40. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeași arie S să se determine acela pentru care suma lungimilor a trei laturi este minimă.

41. În triunghiul ascuțitunghic ABC este înscris dreptunghiului $KLMN$ astfel încît $K, N \in |BC|$. Fie $|AP|$ înălțime în triunghiul ABC și $\{O\} = AP \cap LM$. Aria dreptunghiului $KLMN$ este maximă, dacă și numai dacă O este mijlocul segmentului $|AP|$.

42. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{K\} = AC \cap BD$. Dacă $\sigma[BKC]^2 = \sigma[AKB] \cdot \sigma[CKD]$, atunci $ABCD$ este trapez.

43. Să se determine aria unui trapez cînd se cunosc lungimile laturilor.

44. Fie $ABCD$ un paralelogram. O dreaptă paralelă cu AB intersectează $|BC|$ în K, diagonala $|AC|$ în L și latura $|AD|$ în M. Să se arate că $\sigma[ABK] = \sigma[ALD]$.

45. Dintre toate dreptunghiurile înscrise într-un cerc pătratul are aria cea mai mare.

46. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un dreptunghi și se presupune că există alte două dreptunghiuri $KB_2B_3B_4$ și $KC_2C_3C_4$ avînd vîrful comun $K \in |A_1A_2|$ și $B_2, C_2 \in |A_2A_3|$, $B_3, C_3 \in |A_3A_4|$, $B_4, C_4 \in |A_4A_1|$. Să se arate că avem $\sigma[KB_2B_3B_4] + \sigma[KC_2C_3C_4] = \sigma[A_1A_2A_3A_4]$, adică suma ariilor celor două dreptunghiuri înscrise este egală cu aria dreptunghiului dat.

47. Un trapez isoscel are diagonalele perpendiculare. Să se determine aria trapezului în funcție de lungimea liniei mijlocii.

48. În interiorul unui poligon convex de arie S și semiperimetru p se consideră un cerc de rază r. Să se arate că $S > rp$.

Scanned with OKEN Scanner

49. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră diametrul $|AB|$. Să se găsească pe cercul dat două puncte C și D de aceeași parte a lui AB astfel încît patrulaterul $ABCD$ să aibă aria maximă.

50. Cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O, r_1)$ sînt concentrice și aria cercului $\mathcal{C}(O, r)$ este jumătate din aria cercului $\mathcal{C}(O, r_1)$. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r_1)$ astfel încît AB și CD sînt tangente la $\mathcal{C}(O, r)$ și $AB \parallel CD$. Considerăm figura $f = \text{Int}\mathcal{C}(O, r_1) \cap \text{Ext}\mathcal{C}(O, r) \cap [aO \cap [bO$, unde $a = AB$ și $b = CD$. Să se arate că aria figurii f este jumătate din aria pătratului înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.

51. Fie $ABCD$ un dreptunghi de arie 1982. Să se arate că există o familie de cercuri $\mathcal{C}_i(O_i, r_i)$, $i \in I$ (I o mulțime finită de indici) care au interioarele disjuncte două cîte două și suma razelor r_i să fie $R = 1982$.

52. Să se determine punctele O interioare patrulaterului convex $ABCD$ astfel încît $\sigma[AEOH] = \sigma[BFOE] = \sigma[CGOF] = \sigma[DHOG]$, unde E, F, G, H sînt mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ respectiv.

53. Fie M punctul izogon al triunghiului ascuțitunghic ABC (deci $\text{m}(\widehat{AMB}) = \text{m}(\widehat{BMC}) = \text{m}(\widehat{CMA}) = 120$). Dacă $\text{m}(\hat{C}) = 60$ să se demonstreze că distanța dintre M și centrul de greutate G al triunghiului este $\frac{1}{3}|a - b|$ unde $a = \|BC\|$ și $b = \|AC\|$.

54. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct interior. Notăm $\{A_1\} = AM \cap BC$, $\{B_1\} = BM \cap AC$, $\{C_1\} = CM \cap AB$. Arătați că:

1) $\dfrac{\|AM\|}{\|A_1M\|} + \dfrac{\|BM\|}{\|B_1M\|} + \dfrac{\|CM\|}{\|C_1M\|} \geqslant 6$; 2) $\dfrac{\|AM\|}{\|A_1M\|} \cdot \dfrac{\|BM\|}{\|B_1M\|} \cdot \dfrac{\|CM\|}{\|C_1M\|} \geqslant 8$.

55. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu lungimile laturilor a, b, c și aria S. Fie P un punct interior astfel încît

$$a\|PA\| + b\|PB\| + c\|PC\| = 4S.$$

Să se demonstreze că P este ortocentrul triunghiului.

56. Fie ABC un triunghi oarecare și $A_1 \in |BC|$, $B_1 \in |AC|$, $C_1 \in |AB|$. Să se arate că $\sigma[A_1B_1C_1] \geqslant \min\{\sigma[AB_1C_1], \sigma[A_1BC_1], \sigma[A_1B_1C]\}$.

57. Arătați că segmentul de lungime cea mai mică, care împarte un triunghi echilateral în două poligoane de arii egale, are lungimea $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ și este paralel cu o latură a triunghiului echilateral, a fiind lungimea laturii triunghiului echilateral.

58. Dintre toate poligoanele cu n laturi înscrise într-un cerc poligonul regulat are aria cea mai mare.

59. Diametrul $[AB]$ împarte cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în două semicercuri. Pe un semicerc alegem n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ astfel încît P_1 este situat pe arcul mic $\widehat{AP_2}$, P_2 este situat pe arcul mic $\widehat{P_1P_3}$, ..., P_n este situat pe arcul mic $\widehat{P_{n-1}B}$.

Care este poziția punctului C pe celălalt semicerc dacă vrem ca suma ariilor triunghiurilor CP_1P_2, CP_2P_3, CP_3P_4, ..., $CP_{n-1}P_n$ să fie maximă?

Scanned with OKEN Scanner

60. Fie S_n aria poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Arătați că $S_{4n} = \dfrac{S_{2n} \cdot \sqrt{2S_{2n}}}{\sqrt{S_n + S_{2n}}}$.

61. În triunghiul ABC se consideră punctele $E \in |AB|$, $F \in |AC|$ astfel încît $EF \| BC$. Să se determine raportul $\dfrac{\| EA \|}{\| EB \|}$ știind că triunghiul AEF și trapezul $BEFC$ au arii egale.

62. Considerăm în plan un disc (Δ) delimitat de către cercul (Γ) și fie dreptunghiul $ABCD$. Știind că dreptunghiul $ABCD$ poate fi rotit în jurul punctului fix A, să se calculeze aria intersecției discului (Δ) cu interiorul dreptunghiului $ABCD$. Se dau: $\| AB \| = l$, $\| BC \| = L$, raza cercului (Γ) egală cu r, distanța de la centrul cercului (Γ) la punctul A egală cu R $\left(\text{știm de asemenea că: } l > 0,\ L > 0,\ r > 0,\ R > 0,\ L > 2R,\ l < \dfrac{r}{3}\right)$.

63. În triunghiul $A_1A_2A_3$ se duc cevienele arbitrare A_iB_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Paralela printr-un punct $M \in \text{Int } A_1A_2A_3 \cup A_1A_2A_3$ la A_iB_i intersectează latura opusă lui A_i în punctul M_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Să se arate că:

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 3} (\| A_iB_i \|) \leqslant \| MM_1 \| + \| MM_2 \| + \| MM_3 \| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} (\| A_iB_i \|).$$

64. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $M, N \in \text{Int } ABC$, $M \neq N$, $\{D\} = [AN \cap |BC|$, iar E și F analogele punctului D. Paralela prin M la BC taie segmentul $|AD|$ în punctul M_a. Fie M_b și M_c analogele punctului M_a. Să se demonstreze că:

$$\frac{\| AM_a \|}{\| AD \|} + \frac{\| BM_b \|}{\| BE \|} + \frac{\| CM_c \|}{\| CF \|} = 2.$$

65. Fie un patrulater convex și un cerc interior lui. Să se arate că diametrul cercului este mai mic decît fiecare din diagonalele patrulaterului.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

În problemele care urmează vom nota cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC, cu A, B, C măsurile unghiurilor (în radiani), cu R raza cercului circumscris, cu r raza cercului înscris, cu S aria, iar cu p semiperimetrul.

1. În triunghiul ABC cunoaștem: $a = 2\sqrt{7}$, $c = 6$, $\cos 2B = \frac{1}{7}$.

1) Aflați $\cos B$;
2) Presupunînd apoi că triunghiul este ascuțitunghic aflați b, A, S, r, și R.

2. Demonstrați că în orice triunghi ABC există relațiile:

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}{a-b} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}}{b-c} = \frac{\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{B}{2}}{c-a};$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}{a+b} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}}{c+a}.$$

3. Un triunghi dreptunghic are lungimea ipotenuzei de 10 cm, iar raza cercului înscris de 2 cm. Aflați lungimile catetelor.

4. În triunghiul ABC cunoaștem $A = \frac{\pi}{3}$, $\|BB'\| = 7$ și $\|CC'\| = 2\sqrt{19}$, unde $|BB'|$ și $|CC'|$ sînt mediane. Se cer lungimile laturilor triunghiului.

5. Aflați valoarea maximă a ariei unui triunghi ABC cunoscînd că $\|BC\| = 10$ și $m(\hat{A}) = 72$.

6. În triunghiul ABC cunoaștem $R = \sqrt{2}$, $a = 2$, $b = \sqrt{6}$. Aflați c și S.

7. Laturile $|AB|$ și $|AC|$ ale unui triunghi ABC au lungimile respectiv de 4 m și 5 m iar aria este de $5\sqrt{3}$ m². Aflați lungimea laturii $|BC|$.

8. Demonstrați că într-un triunghi ABC avem:

$$\cos 2A = \frac{\cos 2B + \cos 2C}{2} \text{ dacă și numai dacă } a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2}.$$

9. Care este numărul minim de elemente ale unui patrulater, ce trebuie cunoscute pentru a determina aria acestuia?

10. Fie $ABCD$ un patrulater în care $\|AB\| = \|BC\|$, $\|CD\| = 2\|AB\|$, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD}) = 120$.

Scanned with OKEN Scanner

1) Demonstrați că triunghiul ABD este isoscel;

2) Calculați valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului $\widehat{ADB}$;

3) Notînd cu M mijlocul lui $|BD|$ iar cu N mijlocul lui $|CD|$, demonstrați că punctele A, M, N sînt coliniare;

4) Demonstrați că dreapta CD este tangentă cercului circumscris triunghiului AMD;

5) Calculați aria patrulaterului $ABCD$ în funcție de $\|AB\| = a$;

6) Calculați sinusul unghiurilor formate de dreptele AC și BD.

11. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC. Notăm cu D intersecția dreptelor AD și BC. Demonstrați că:

$$\frac{\|BD\|}{\|CD\|} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}.$$

12. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = 2(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C).$$

13. Un teren agricol are forma de trapez cu lungimile bazelor de 510 m și 300 m și ale laturilor neparalele de 200 m și 130 m. Calculați aria terenului.

14. 1) Demonstrați că într-un triunghi ABC avem:

$$\sin (A - B) + \sin (B - C) + \sin (C - A) = 0$$

dacă și numai dacă triunghiul este isoscel.

2) Demonstrați că dacă $a \leqslant b \leqslant c$, atunci:

$$\sin (A - B) + \sin (B - C) + \sin (C - A) \leqslant 0.$$

15. Arătați că pentru ca un triunghi ABC să fie ascuțitunghic este necesar și suficient să aibă loc inegalitatea:

$$\left(b + c - a - \frac{bc}{p}\right)\left(a + c - b - \frac{ac}{p}\right)\left(a + b - c - \frac{ab}{p}\right) > 0.$$

16. În triunghiul ABC se notează cu l_a lungimea bisectoarei unghiului $\hat{A}$.

1) Demonstrați că $l_a = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{A}{2}$;

2) Deduceți inegalitatea $l_a < \frac{b + c}{2}$.

17. Demonstrați că în orice triunghi au loc inegalitățile de mai jos:

1) $0 < (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leqslant abc$;

2) $R \geqslant 2r$;

3) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

4) $\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}$;

5) $\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

Scanned with OKEN Scanner

6) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant 2\sqrt{3}$;

7) $a + b + c \leqslant 3R\sqrt{3}$;

8) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca \geqslant 4S\sqrt{3}$;

9) $27\,Rr \leqslant 2p^2$;

10) $p \geqslant 3r\sqrt{3}$;

11) $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

În ce caz inegalitățile se transformă în egalități?

18. Fie ABC un triunghi oarecare și $A'B'C'$ triunghiul său ortic (determinat de picioarele înălțimilor). Demonstrați că:

1) $\| B'C' \| = a \cos A$, $\| A'C' \| = b \cos B$ și $\| A'B' \| = c \cos C$;

2) $\| B'C' \| + \| C'A' \| + \| A'B' \| \leqslant p$;

3) Aria triunghiului ortic este mai mică sau cel mult egală cu 1/4 din aria triunghiului dat.

19. Fie triunghiul ABC, A', B', C', mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ și $\overset{\frown}{AB}$ pe cercul circumscris triunghiului ($A' \in \text{Int } \overset{\frown}{BAC}$ și analoagele) iar A'', B'', C'' intersecțiile înălțimilor triunghiului ABC cu cercul circumscris. Comparați ariile triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ și $A''B''C''$.

20. Fie ABC un triunghi. Demonstrați că următoarele afirmații sînt echivalente:

1) $\operatorname{ctg} A = 2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$;

2) $5a^2 = b^2 + c^2$;

3) $\cos A = \frac{2a^2}{bc}$.

21. În triunghiul ABC notăm cu I centrul cercului înscris, cu A', B', C' intersecțiile bisectoarelor cu laturile, iar cu A'', B'', C'' intersecțiile bisectoarelor cu cercul circumscris.
Demonstrați că:

$$\| IA' \| \cdot \| AA'' \| = \| IB' \| \cdot \| BB'' \| = \| IC' \| \cdot \| CC'' \| = \frac{abc}{a+b+c}.$$

22. Dacă lungimile laturilor unui triunghi ABC verifică relația $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ atunci $\operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C \geqslant 3$. Cînd are loc egalitatea?

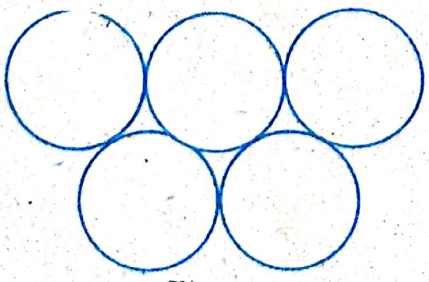


Fig. α

23. Dintr-o foaie de tablă se taie discuri cu raza de 1 dm, ca în figura alăturată.
Din deșeurile rămase se taie suprafețe triunghiulare echilaterale (din fiecare porțiune mărginită de 3 discuri se taie cîte o suprafață triunghiulară) astfel încît procentul de material pierdut să fie minim. Aflați lungimea laturii unui asemenea triunghi echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

24. n cercuri avînd razele egale și centrele conciclice sînt tangente două cîte două. Aflați aria suprafeței cuprinse între cele n cercuri în funcție de n și raza R a cercurilor.

25. Aflați distanța dintre punctele A și B cunoscînd coordonatele lor plane: $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ și $B\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$.

26. Se dau două puncte definite prin coordonatele lor polare

$$A\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ și } B\left(\sqrt{7},\ 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}\right).$$

Aflați coordonatele polare ale mijlocului M al segmentului $|AB|$.

27. Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea punctelor planului și cu f o funcție $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care asociază fiecărui punct M de coordonate polare (r, α) un punct $f(M)$ de coordonate polare (r', α'). Demonstrați că:

1) Dacă $r = r'$ și $\alpha' = \alpha + \varphi$ unde φ este un număr real dat, atunci f este o izometrie;

2) Dacă $r' = kr$ și $\alpha' = \alpha$, unde k este un număr real nenul dat, atunci f este o asemănare.

28. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că dacă $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, atunci $m(\hat{C}) \leqslant 120$, unde am notat $a = \|BC\|$, $b = \|AC\|$ și h_c lungimea înălțimii din vîrful C.

29. În planul unui triunghi echilateral ABC de latură a se consideră un punct oarecare situat la distanțele m, n, p de vîrfurile triunghiului. Arătați că: $a^4 + m^4 + n^4 + p^4 = a^2m^2 + a^2n^2 + a^2p^2 + m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2$.

30. Cercul $\mathcal{C}(O, r)$ este înscris în triunghiul ABC. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ și $\mathcal{C}(O_3, r_3)$ sînt tangente exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și sînt tangente fiecare la cîte două laturi ale triunghiului ABC. Să se arate că $r = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_1r_3}$.

31. Patru cercuri $\mathcal{C}(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ sînt tangente exterior (interior) cu cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Notăm K_{ij} lungimea tangentei exterioare a cercurilor $\mathcal{C}(O_i, r_i)$ și $\mathcal{C}(O_j, r_j)$ unde $i \neq j$. Arătați că $K_{12}K_{34} + K_{23}K_{41} = K_{13}K_{24}$.

32. Fie $ABCD$ un paralelogram, astfel încît $\|AB\| = a$, $\|BC\| = b$, $a > b$ și $m(\widehat{AOD}) = \alpha$, $\alpha < 90$, $\{O\} = AC \cap BD$. Determinați distanța dintre dreptele paralele AB și DC. Ce relație există între a, b și α?

33. Fie $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$ o mulțime de șase puncte oarecare din plan. Notăm $d = \max\limits_{1 \leqslant k,\ i \leqslant 6} \|A_iA_k\|$, $\delta = \min\limits_{\substack{1 \leqslant k,\ i \leqslant 6 \\ k \neq i}} \|A_iA_k\|$. Arătați că $d \geqslant \delta\sqrt{3}$.

34. Arătați că octogonul ale cărui unghiuri sînt congruente, iar lungimile laturilor sînt numere raționale, are centru de simetrie.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN ALGEBRĂ. NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

1. Scrieți sub formă trigonometrică numerele complexe:

$$z_1 = 6 + 6i\sqrt{3};$$

$$z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$z_3 = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

$z_4 = (z_1 \cdot z_2)^5$, cu z_1, z_2 ca mai sus;

$$z_5 = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^3, \text{ cu } z_1, z_2 \text{ ca mai sus.}$$

2. Rezolvați ecuațiile:

1) $z^3 = i$;
2) $z^4 = -i$;
3) $z^5 = 4 - 4i$;
4) $z^6 + z^3 + 1 = 0$;
5) $z^8 + z^4 = 3 + i\sqrt{3}$;
6) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;
7) $z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$;
8) $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$;
9) $z^{2n} - z^{2n-1} + \ldots + z^2 - z + 1 = 0$.

3. Fie a, b, c numere reale astfel încît $b^2 < 4ac$ iar $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile ecuației:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Demonstrați că pentru orice $n \in N$ numărul $z_1^n + z_2^n$ este real.

4. 1) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
„Oricare ar fi $z \in \mathbf{C}$ există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $z^n \in \mathbf{R}$".
2) Aflați mulțimea:

$$\{z \in \mathbf{C} \mid z^n \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}^*\}.$$

5. 1) Demonstrați că singura rădăcină comună a ecuațiilor

$$z^9 = 1 \quad \text{și} \quad z^{14} = 1$$

este 1.

2) Demonstrați că dacă m și n sînt numere naturale prime între ele, atunci singura soluție comună a ecuațiilor

$$z^m = 1 \text{ și } z^n = 1$$

este 1.

6. Aflați rădăcinile comune ale ecuațiilor

1) $z^6 = 1$ și $z^{10} = 1$;
2) $z^{12} = 1$ și $z^{18} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Fie m și n numere naturale având cel mai mare divizor comun egal cu d. Notăm

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\};$$
$$B = \{z \in \mathbf{C} \mid z^m = 1\};$$
$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid z^d = 1\}.$$

Demonstrați că $A \cap B = D$.

8. Fie P_m și P_n poligoane regulate cu m și respectiv n laturi, înscrise în același cerc și având un vîrf comun.

1) Demonstrați că dacă m și n sînt prime între ele atunci poligoanele nu mai au alt vîrf comun și reciproc.

2) Dacă m și n au cel mai mare divizor comun $d > 2$ atunci vîrfurile comune ale celor două poligoane sînt vîrfurile unui poligon regulat cu d laturi.

Ce se poate spune în cazul cînd $d = 2$?

c) Într-un cerc se înscriu două poligoane regulate, unul cu 1982 de laturi, altul cu 2973 laturi. Știind că au vîrfuri comune, să se afle numărul lor.

9. Să se descompună polinomul $z^n - 1$ în factori ireductibili cu coeficienți reali.

10. Se dau ecuațiile:

1) $z^{n+1} = z$; 2) $z^n = |z|$; 3) $z^{n-1} = \bar{z}$,

unde $z \in \mathbf{C}$. Demonstrați că ecuațiile sînt echivalente.

11. Rezolvați ecuația:

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

12. Determinați mulțimea tuturor punctelor din plan al căror afix verifică relația

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbf{R}.$$

13. Aflați locul geometric al punctelor din plan al căror afix z verifică relația

$$|z + |z|| = |z - |z||.$$

14. Folosind formula lui *Moivre* calculați sumele:

$$S_1 = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha;$$
$$S_2 = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha;$$
$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\alpha;$$
$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} a^k \sin k\alpha;$$
$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos k\alpha;$$
$$S_6 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin k\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie z_1 și z_2 două numere complexe cu proprietatea

$$|z_1 + z_2| = |z_1 z_2|.$$

1) Demonstrați că cel puțin unul dintre numere are modulul mai mic sau egal cu 2.

2) Dați exemplu de numere complexe $z_1 \neq z_2$ pentru care

$$|z_1 + z_2| = |z_1 z_2|.$$

16. Demonstrați că dacă două numere complexe z_1, z_2 au același modul și suma lor este reală, atunci punctele de afix z_1 și z_2 sînt simetrice față de Ox sau față de origine.

17. 1) Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte două cîte două, astfel încît

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \quad \text{și} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

Demonstrați că z_1, z_2 și z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

2) Dacă z_1, z_2, z_3, z_4 sînt numere complexe distincte două cîte două, astfel încît

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \quad \text{și} \quad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

rezultă că z_1, z_2, z_3 și z_4 sînt afixele vîrfurilor unui pătrat?

18. Fie A punctul de afix $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Notăm cu B simetricul lui A față de Ox, cu C simetricul lui A față de Oy, cu D simetricul lui A față de origine, iar cu E simetricul lui A față de prima bisectoare.

1) Aflați afixele punctelor B, C, D, E.

2) Pentru ce valori ale lui α există o ecuație binomă avînd ca rădăcini afixele punctelor A, B, C și D? Indicați ecuația.

19. Considerăm numerele complexe $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ și $z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Aflați modulul și argumentul redus al numărului complex z_3 știind că punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sînt coliniare și că $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$.

20. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe cu același modul.

1) Demonstrați că există α, $\beta \in \mathbf{C}$ astfel încît

$$z_2 = \alpha z_1, \quad z_3 = \beta z_1 \quad \text{și} \quad |\alpha| = |\beta| = 1.$$

2) Considerăm ecuația $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0$. Exprimați pe α în funcție de β.

3) Demonstrați că dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ atunci sau $z_1 = z_2 = z_3$ sau z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

21. Considerăm familia de funcții $f_\alpha : \mathbf{N} \to \Gamma$ definite prin formula

$$f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$ și $\Gamma = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$.

1) Demonstrați că f_α nu este surjectivă pentru nici o valoare reală a lui α.

Scanned with OKEN Scanner

2) Demonstrați că oricare ar fi $m \in \mathbf{N}^*$ există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît imaginea funcției f_α să aibă m elemente.

3) Demonstrați că oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$, funcția f_α este sau injectivă sau periodică.

4) Interpretare geometrică.

22. Dacă numerele reale α, β, γ verifică relațiile:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0,$$

atunci:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma}{3}$$

și

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma}{3}.$$

23. Fie z un număr complex nenul.

1) Să se arate că numărul $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$ este real și să se deducă de aici că există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $z^2 = az + b$.

2) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ există a_n, b_n reali astfel ca $z^n = a_n z + b_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

INCIDENȚĂ, ORDONARE, CONGRUENȚĂ ȘI PARALELISM

1. Să se arate că spațiul $\mathcal{S}$ coincide cu reuniunea dreptelor sale.

2. Să se arate că spațiul este egal cu reuniunea tuturor planelor sale.

3. Fie α și β două plane. Să se arate că există cel puțin o dreaptă nesituată în nici unul dintre cele două plane.

4. Fie α și β două plane. Să se arate că există cel puțin un punct simultan exterior celor două plane.

5. Fie α și β două plane care se taie după dreapta d. Fie $C, D \in \beta$ separate de către d. Să se arate că planul α separă punctele C și D.

6. Fie α un plan, d o dreaptă conținută în α și A, B două puncte din α separate de către dreapta d. Să se arate că există un plan β care conține dreapta d și separă punctele A și B.

7. Fie A, B două puncte distincte. Să se arate că există un plan care le separă.

8. Fiind date două drepte necoplanare a, b și A un punct simultan exterior dreptelor a și b să se construiască o dreaptă ce trece prin A și intersectează dreptele a și b. Problema are întotdeauna soluție?

9. Fie α un plan și d o dreaptă care intersectează planul α în punctul P. Să se arate că există o dreaptă a conținută în planul α, perpendiculară pe d, ce trece prin P.

10. Fie α un plan și d o dreaptă ce intersectează planul α în punctul P. Fie $\mathcal{C}$ un cerc situat în planul α, de centru P. Să se arate că d este perpendiculară pe α dacă și numai dacă există un punct $A \in d$ egal depărtat de toate punctele cercului $\mathcal{C}$.

11. Fie α un plan și d o dreaptă astfel încît $\alpha \cap d = \{P\}$. Să se arate că $d \perp \alpha$ dacă și numai dacă d este egal înclinată față de orice dreaptă situată în planul α ce trece prin punctul P.

12. Fie C, D două puncte distincte. Fie a o dreaptă necoplanară cu CD. Să se determine pe dreapta a un punct egal depărtat de C și D. Problema are întotdeauna soluții?

13. Fie a o dreaptă și A, B două puncte necoplanare cu a. Determinați un punct M situat pe a astfel încît suma $\|MA\| + \|MB\|$ să fie minimă.

14. Fie α un plan și A, B două puncte distincte situate de aceeași parte a lui α. Găsiți un punct F situat în planul α astfel încît suma $\|FA\| + \|FB\|$ să fie minimă.

15. Fie α un plan și A, B două puncte situate la distanțe diferite de planul α. Să se arate că $AB \cap \alpha \neq \emptyset$.

Scanned with OKEN Scanner

16. Fie α un plan și A, B două puncte situate la distanțe diferite de planul α, de o parte și de alta a planului α. Să se determine un punct $F \in \alpha$ astfel încît valoarea expresiei:

$$|\,\|FB\| - \|FA\|\,|$$

să fie maximă.

17. Fie A, B două puncte situate de aceeași parte a planului α, la distanțe diferite de α, astfel încît AB nu este perpendiculară pe α. Să se arate că planul mediator al segmentului $|AB|$ și planul α sînt secante.

18. Fie A, B două puncte separate de către un plan α, nesituate la aceeași distanță de α, astfel încît AB nu este perpendiculară pe α. Să se arate că mulțimea $\{F \in \alpha \,/\, \|AF\| = \|BF\|\}$ este o dreaptă.

19. Fie α un plan și A, B, C trei puncte necoliniare exterioare planului α. Să se determine un punct D în planul α egal depărtat de punctele A, B, C. Se știe că planul (ABC) nu este perpendicular pe planul α.

20. Fie α, β două plane care nu sînt perpendiculare. Fie $O \in \beta$ un punct fixat. Fie a o dreaptă cu: $O \in a$, $a \perp \beta$. Să se arate că $a \cap \alpha \neq \emptyset$.

21. Să se determine locul geometric al tuturor punctelor din spațiu egal depărtate de punctele unui cerc $\mathcal{C}$ situat într-un plan α.

22. Fie A, B două puncte distincte exterioare unui plan α și astfel încît dreapta AB nu este perpendiculară pe planul α. Să se determine locul geometric al punctelor din planul α care au diferența pătratelor distanțelor la punctele A și B constantă.

23. Arătați că printr-un punct dat nu pot trece două plane perpendiculare pe o dreaptă dată.

24. Fie α un plan și A un punct exterior lui α. Fie $BCDE$ un dreptunghi situat în planul α; știm că distanțele de la punctul A la vîrfurile dreptunghiului sînt egale cu a, $a > 0$, și distanța de la A la α cu b, $b > 0$. Calculați lungimile laturilor dreptunghiului știind că raportul lor este 2.

25. Lungimile laturilor unui triunghi sînt a, a, b, $a \neq b$, iar proiecția lui pe un plan este un triunghi echilateral. Calculați lungimea laturilor triunghiului echilateral.

26. Printr-un vîrf al unui pătrat se duce un plan paralel cu o diagonală a pătratului. Arătați că proiecția ortogonală a pătratului pe plan este un romb.

27. Fie a, b două drepte neparalele și care nu se intersectează și AB perpendiculara lor comună, $A \in a$, $B \in b$. Fie $C \in a$, $D \in b$. Dacă $|AC| \equiv |BD|$ atunci arătați că: $\widehat{ACD} \equiv \widehat{BDC}$.

28. Fie S vîrful unui triedru tridreptunghic, iar A, B, C trei puncte situate fiecare pe o muchie a triedrului. Notăm cu O proiecția lui S pe planul (ABC).

1) Să se arate că O este ortocentrul triunghiului ABC.

2) Să se arate că au loc egalitățile:

$$\sigma[ABC]^2 = \sigma[SAB]^2 + \sigma[SBC]^2 + \sigma[SAC]^2; \qquad \sigma[ASB]^2 = \sigma[OAB] \cdot \sigma[ABC].$$

Să se interpreteze rezultatele obținute.

Scanned with OKEN Scanner

29. Un romb are o latură inclusă într-un plan π, iar diagonalele sale formează cu planul π unghiuri de măsuri α și β. Notînd cu x măsura unghiului diedru format de planul rombului cu planul π, să se arate că are loc egalitatea:

$$\cos^2 x = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

30. Fie $[\widehat{OABC}]$ un triedru tridreptunghic în O. Notăm cu α, β, γ măsurile în radiani ale unghiurilor formate de semidreptele $|AO$, $|BO$, $|CO$ cu planul (ABC). Să se arate că:

$$\alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{4}.$$

31. Fie $[AB]$ și $[CD]$ două segmente oarecare în spațiu, nesituate în același plan, iar M și N mijloacele lor.
Arătați că $\|AD\| + \|BC\| > 2\|MN\|$.

32. Măsurile unghiurilor diedre ale unui triedru sînt egale cu 60, 60, 90. Să se arate că măsura unghiului format de muchia unghiului diedru drept cu planul determinat de celelalte două muchii este 45.

33. Proiecțiile triunghiului ABC pe două plane perpendiculare sînt două triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime 1.

Determinați perimetrul triunghiului ABC dacă se știe că $\|AB\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

34. Fie $[SA$, $[SB$, $[SC$ trei semidrepte în spațiu astfel încît nici una nu este perpendiculară pe celelalte două. Prin fiecare semidreaptă trece un plan perpendicular pe planul determinat de celelalte două semidrepte. Arătați că cele trei plane se intersectează după o dreaptă d.

35. Planele perpendiculare α și β sînt intersectate de planele γ și δ astfel încît dreptele $\alpha \cap \gamma$ și $\alpha \cap \delta$ sînt paralele. Dacă măsura unghiurilor formate de dreptele $\alpha \cap \delta$ și $\alpha \cap \gamma$ cu muchia $\alpha \cap \beta$ este egală cu a, arătați că măsura unghiului format de muchia $\gamma \cap \delta$ cu planul β este egală cu a.

36. Pe una din fețele unui unghi diedru de muchie AB este situat segmentul $|CD|$. Arătați că dreapta CD formează un unghi maxim cu cealaltă față a unghiului diedru dacă $CD \perp AB$.

37. Punctele A, B, C, D sînt așezate în spațiu astfel încît $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Arătați că $BC \perp AD$.

38. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și AK o dreaptă perpendiculară pe planul său. Arătați că $KE \perp DE$.

39. Arătați că dacă un hexagon oarecare din spațiu are laturile opuse congruente și paralele, atunci mijloacele laturilor sînt coplanare.

40. Arătați că distanța de la centrul de greutate al unui triunghi la un plan oarecare este media aritmetică a distanțelor de la vîrfurile triunghiului la acel plan.

41. Pe laturile patrulaterului strîmb $ABCD$ se consideră punctele A', B', C', D' astfel încît:

$$\frac{\|AA'\|}{\|A'B\|} = \frac{\|AD'\|}{\|D'D\|} = \frac{\|CC'\|}{\|C'D\|} = \frac{\|CB'\|}{\|B'B\|}.$$

Arătați că patrulaterul $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

Scanned with OKEN Scanner

42. Dreapta d_1 este conținută în planul α, iar dreapta d_2 intersectează planul α dar nu intersectează dreapta d_1 și nu este conținută în planul α. Arătați că dreptele d_1 și d_2 sînt necoplanare.

43. Pe dreptele paralele a, b, c se consideră punctele fixe A, B, C și punctele mobile A', B', C' astfel încît A', B', C' sînt situate de aceeași parte a planului (ABC) iar suma $\|AA'\| + \|BB'\| + \|CC'\|$ este constantă. Arătați că planul $(A'B'C')$ trece printr-un punct fix.

44. Arătați că dacă o dreaptă formează unghiuri congruente cu trei drepte concurente ale unui plan, atunci ea este perpendiculară pe acest plan.

45. Fie α un plan și A, B două puncte distincte situate în afara planului α. Să se arate că locul geometric al punctelor $P \in \alpha$ care au suma pătratelor distanțelor la punctele A și B constantă coincide cu locul geometric al punctelor $P \in \alpha$ care au suma pătratelor la proiecțiile punctelor A și B pe planul α constantă.

46. Fie α un plan. Să se găsească locul geometric al picioarelor perpendicularelor coborîte dintr-un punct A exterior planului α pe toate dreptele situate în planul α ce trec printr-un punct fix C al planului α.

47. Fie α un plan și a, b două drepte astfel încît: $\alpha \perp b$, $a \perp b$. Să se arate că: $a \parallel \alpha$.

48. Fie α un plan și A un punct exterior lui α. Fie B piciorul perpendicularei coborîtă din A pe α. Fie C un punct pe cercul $\mathcal{C} \subseteq \alpha$ de centru B și rază $\|BC\| = 3$. Fie D un punct situat pe tangenta în C la cercul $\mathcal{C}$ astfel încît $\|CD\| = 5$; știind că $\|AB\| = 8$, să se calculeze $\|AD\|$.

49. Fie a, b două drepte necoplanare și A un punct exterior lor astfel încît: 1) Paralela prin A la a nu taie pe b. 2) Paralela prin A la b nu taie a. Să se construiască un plan paralel cu a și b care să treacă prin punctul A.

50. Fie $ABCD$ un paralelogram. Fie α un plan ce trece prin diagonala $|BD|$ a paralelogramului dat. Fie G și F respectiv proiecțiile punctelor A și C pe planul α. Să se arate că segmentele $|AG|$ și $|CF|$ au lungimile egale.

51. Fie a și b două drepte necoplanare. Să se construiască o dreaptă paralelă cu dreapta dată d care să intersecteze dreptele a și b.

52. Să se arate că dreptele ce unesc mijloacele laturilor unui patrulater strîmb formează un paralelogram.

53. Să se arate că în orice patrulater strîmb, dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse trec prin mijlocul segmentului ce unește mijloacele diagonalelor.

54. Fie α, β, γ trei plane paralele. Fie a, b, c trei numere reale pozitive. Fie d o dreaptă care intersectează planele α, β și γ respectiv în punctele A, B și C. Știind că $d(\alpha, \beta) = a$, $d(\beta, \gamma) = b$ și $\|AC\| = c$, să se calculeze $\|AB\|$ și $\|BC\|$.

55. Fie d o dreaptă dată și D, F două puncte distincte astfel încît $D \notin d$, $F \notin d$ și mijlocul segmentului $|DF|$ este exterior dreptei d. Să se construiască un plan α astfel încît d și punctele D și F să fie situate la aceeași distanță față de α.

Scanned with OKEN Scanner

56. Fie A, B, C, D patru puncte distincte necoplanare date. Să se construiască un plan care să treacă printr-unul din cele patru puncte și să fie situat la aceeași distanță față de cele trei puncte rămase.

57. Fie O un punct dat exterior unei drepte d. Să se arate că picioarele perpendicularelor coborîte din O pe un plan variabil ce trece prin dreapta d sînt coplanare.

58. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Găsiți un punct H egal depărtat de punctele A, B, C și D.

59. Fie $\mathcal{L}$ un poligon situat într-un plan α. Fie A un vîrf al lui $\mathcal{L}$ și d o dreaptă ce trece prin A și nu este conținută în planul α. Prin fiecare dintre vîrfurile rămase ale lui $\mathcal{L}$ ducem paralele la dreapta d. Considerăm pe fiecare dintre dreptele construite cîte un punct astfel încît toate punctele astfel considerate sînt de aceeași parte a planului α și situate la egală distanță față de α. Să se arate că punctele considerate sînt vîrfurile unui poligon congruent cu poligonul dat $\mathcal{L}$.

60. Fie α, β, γ și δ patru plane astfel încît $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \parallel \delta$ și α și γ sînt secante. Atunci și planele β și δ sînt secante, iar dreptele de intersecție $\alpha \cap \gamma$ și $\beta \cap \delta$ sînt paralele.

61. Dacă printr-un punct O situat în exteriorul unui plan α se duc două paralele b și c la α și dacă ducem prin punctul O două plane β și γ respectiv perpendiculare pe b și c, atunci dreapta $\beta \cap \gamma$ este perpendiculară pe planul α.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XI

POLIEDRE

1. Arătați că dacă secțiunea unui cub cu un plan este un poligon regulat, atunci numărul laturilor acestui poligon nu poate fi decît 3, 4 sau 6.

2. Construiți și calculați lungimea perpendicularei comune corespunzătoare unei diagonale a unui cub și unei diagonale a unei fețe (cele două diagonale nu se intersectează) știind că muchia cubului are lungimea a.

3. Fie $[ABCDA'B'C'D']$ un cub astfel încît $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ sînt muchii laterale. Planul determinat de vîrful A și de centrele fețelor $[A'B'C'D']$ și $[B'C'CB]$ intersectează muchia $|B'C'|$ în E. Determinați raportul $\dfrac{\|B'E\|}{\|EC'\|}$.

4. Fie $[ABCDA'B'C'D']$ un cub. Să se determine raportul volumelor celor două corpuri obținute prin secționarea cubului $[ABCDA'B'C'D']$ cu planul care trece prin vîrful A, mijlocul K al muchiei $[BC]$ și prin centrul M al fetei $[DCC'D']$.

5. Un cub de muchie a se rotește cu un unghi de măsură 90 în jurul uneia dintre dreptele ce trec prin mijloacele a două muchii paralele și nesituate pe aceeași față a cubului. Arătați că volumul intersecției cubului inițial cu cel obținut după rotație este $\dfrac{a^3}{3}(3\sqrt{2}-2)$.

6. Fie M un punct interior piramidei triunghiulare $[ABCD]$, iar A', B', C', D' proiecțiile lui M pe planele fețelor opuse vîrfurilor A, B, C, D respectiv. Fie S_A, S_B, S_C, S_D ariile acestor fețe. Să se arate că:

$$S_A\|AM\| + S_B\|BM\| + S_C\|CM\| + S_D\|DM\| \geqslant 3(S_A\|MA'\| + S_B\|MB'\| + S_C\|MC'\| + S_D\|MD'\|).$$

7. Fie $[SABC]$ un tetraedru, iar $E \in |AB|$, $F \in |AC|$, $K \in |AS|$ astfel încît:

$$\frac{\|SK\|}{\|KA\|} = \frac{\|AE\|}{\|EB\|} = \frac{\|AF\|}{\|FC\|} = 1/2.$$

Să se arate că:

$$v[KAEF] = \frac{2}{27}v[SABC].$$

8. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri congruente și S un punct astfel încît tetraedrul $[SABC]$ este congruent cu tetraedrul $[SA'B'C']$. Arătați că planele mediatoare ale segmentelor $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ se intersectează după o dreaptă sau un punct după cum laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sînt paralele sau nu.

9. Arătați că dacă secțiunea unui tetraedru cu un plan este un paralelogram atunci semiperimetrul acestui paralelogram este mai mic decît lungimea celei mai mari muchii și mai mare decît lungimea celei mai mici muchii.

10. Arătați că orice plan care trece prin mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru, împarte tetraedrul în două tetraedre care au același volum.

Scanned with OKEN Scanner

11. Prin punctul mobil M de pe muchia $[A_3A_4]$ a tetraedrului $[A_1A_2A_3A_4]$ se duc planele π_1 și π_2 paralele cu planele $(A_1A_2A_4)$ respectiv $(A_1A_2A_3)$. Fie V_1 și V_2 volumele tetraedrelor determinate de secțiunile planelor și vîrfurile A_3 respectiv A_4. Să se determine punctul $M \in [A_3A_4]$ pentru care $V_1^2 + V_2^2$ are valoarea minimă.

12. Dacă în tetraedrul $[ABCD]$ muchiile opuse sînt două cîte două congruente, ($|AB| \equiv |CD|$, $|AC| \equiv |BD|$, $|AD| \equiv |BC|$), atunci dreptele care trec prin mijloacele muchiilor opuse sînt două cîte două perpendiculare și sînt axe de simetrie ale tetraedrului.

13. Se dă tetraedrul $[A_1A_2A_3A_4]$ și $M \in |A_1A_2|$. Notînd cu M_1, M_2 proiecțiile lui M pe înălțimile tetraedrului din A_1, respectiv A_2, să se arate că

$$\sigma[A_2A_3A_4] \cdot \|A_1M_1\| + \sigma[A_1A_3A_4] \cdot \|A_2M_2\|$$

este o constantă.

14. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru astfel încît $m(\widehat{A_2A_1A_3}) = m(\widehat{A_2A_1A_4}) = 60$, $m(\widehat{A_3A_1A_4}) = 90$, $\|A_1A_2\| = a$, $\|A_1A_3\| = \|A_1A_4\| = 1/2 \cdot a(\sqrt{5} - 1)$. Să se arate că triunghiul $A_2A_3A_4$ este echilateral.

15. Se dă un tetraedru $[ABCD]$ avînd lungimile muchiilor $a = \|BC\|$, $b = \|AC\|$, $c = \|AB\|$, $m = \|AD\|$, $n = \|BD\|$, $p = \|CD\|$. Să se arate că există un triunghi avînd lungimile laturilor $a \cdot m$, $b \cdot n$, $c \cdot p$.

16. Fie triunghiul echilateral ABC. Să se arate că alegîndu-se în planul triunghiului ABC trei puncte I, J și K astfel încît: $|IA| \equiv |JA|$, $|KB| \equiv |IB|$, $|KC| \equiv |JC|$, cu segmentele: $|IA|$, $|IB|$, $|IC|$, $|JA|$, $|JB|$, $|JC|$, $|KA|$, $|KB|$, $|KC|$ (numai șase au lungimile distincte) se poate construi un tetraedru.

17. Să se determine volumul unui tetraedru în funcție de ariile fețelor sale S_0, S_1, S_2, S_3 știind că unghiurile diedre care au ca față pe cea de arie S_0 sînt congruente.

18. Tetraedrul regulat $[T']$ este imaginea tetraedrului regulat $[T]$ prin rotația cu un unghi de măsură 90 în jurul dreptei ce trece prin mijloacele a două muchii opuse. Arătați că volumul figurii $[T] \cap [T']$ este $\frac{a^3}{6}$, unde $a\sqrt{2}$ este lungimea muchiei tetraedrului $[T]$.

19. Un plan care trece printr-o înălțime a unui tetraedru regulat intersectează planele fețelor laterale după trei drepte care formează cu planul fetei corespunzătoare înălțimii unghiurile de măsuri α, β și γ. Arătați că:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma = 12.$$

20. Fie S vîrful unui triedru tridreptunghic iar A, B, C puncte pe muchiile triedrului, astfel încît $\|SA\| = a$, $\|SB\| = b$, $\|SC\| = c$. Fie M un punct interior triunghiului ABC și notăm cu K, L, N proiecțiile lui M pe planele (SBC), respectiv (SCA), (SAB). Să se arate că:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

unde $\|MK\| = x$, $\|ML\| = y$, $\|MN\| = z$.

Scanned with OKEN Scanner

21. Piramidele $[SABC]$ și $[S'ABC]$ au aceeași bază, iar $S' \in \text{Int}\,[SABC]$. Arătați că:

$$\text{m}(\widehat{AS'B}) + \text{m}(\widehat{BS'C}) + \text{m}(\widehat{CS'A}) > \text{m}(\widehat{ASB}) + \text{m}(\widehat{BSC}) + \text{m}(\widehat{CSA}).$$

22. Fie M un punct interior tetraedrului $[SABC]$. Dreptele SM, AM, BM, CM intersectează fețele opuse vîrfurilor S, A, B, C respectiv în punctele S', A', B', C'. Să se arate că:

1) $\dfrac{\|MS'\|}{\|SS'\|} + \dfrac{\|MA'\|}{\|SA'\|} + \dfrac{\|MB'\|}{\|SB'\|} + \dfrac{\|MC'\|}{\|SC'\|} = 1;$

2) $\dfrac{\|SM\|}{\|SS'\|} + \dfrac{\|AM\|}{\|AA'\|} + \dfrac{\|BM\|}{\|BB'\|} + \dfrac{\|CM\|}{\|CC'\|} = 3.$

23. Arătați că orice tetraedru poate fi secționat cu un plan astfel încît secțiunea să fie un romb.

24. Se consideră piramida triunghiulară $[IABC]$, punctele M și N situate respectiv pe fețele $[IAC]$ și $[ABC]$ astfel ca MN să fie paralelă cu IB. Să se afle locul geometric al punctului L situat pe $|MN|$ care satisface relația:

$$\frac{\|LM\|}{\|LN\|} = \frac{\sigma[IAC]}{\sigma[ABC]}.$$

25. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară astfel încît baza ABC este un triunghi echilateral și are latura de lungime a. Una din fețele laterale ale piramidei este un triunghi isoscel ale cărui laturi congruente au lungimea $b \neq a$ și este perpendiculară pe planul bazei. Intersecția piramidei cu un plan este un pătrat. Determinați aria pătratului.

26. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară astfel încît $|AB| \equiv |AC|$, $[SA] \perp (ABC)$. Piramida $[SLMN]$ are următoarele proprietăți $L \in [BC]$, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $|SL| \equiv |SM| \equiv |SN|$, $\sigma[LSM] = \sigma[MSN] = \sigma[NSL]$. Cunoaștem $\|SA\| = h$ și $\text{m}(\widehat{CAB}) = \alpha$. Să se determine volumul piramidei $[SLMN]$.

27. Fie $[SABC]$ o piramidă regulată. Notăm cu O proiecția vîrfului S pe planul (ABC) și cu K proiecția punctului O pe muchia $|SC|$. Să se determine volumul piramidei $[SABC]$, știind că măsura unghiului diedru format de două fețe laterale ale piramidei este 2α și că $\|OK\| = a$.

28. Baza piramidei $[MABCD]$ este dreptunghi. Arătați că $\|MA\|^2 + \|MC\|^2 = \|MB\|^2 + \|MD\|^2$.

29. Baza unei piramide este un pătrat. Determinați măsurile unghiurilor diedre corespunzătoare laturilor bazei piramidei, știind că acestea sînt proporționale cu numerele 1, 2, 4, 2.

30. Arătați că dacă într-o piramidă patrulateră regulată unghiurile plane de la vîrf au măsura $\frac{\pi}{3}$, atunci muchiile laterale ce trec prin vîrfuri opuse ale bazei, sînt perpendiculare.

31. Fie $[SABCD]$ o piramidă patrulateră regulată. Secționăm piramida cu planul determinat de punctele A, B și de mijlocul muchiei $|SC|$. Determinați raportul volumelor celor două corpuri obținute.

Scanned with OKEN Scanner

32. Fie $[SABCD]$ o piramidă patrulateră regulată. Să se determine raportul volumelor celor două corpuri obținute prin secționarea piramidei cu planul determinat de mijloacele muchiilor $|AB|$, $|AD|$, $|CS|$.

33. Fie $[SABCD]$ o piramidă patrulateră astfel încît baza $ABCD$ este romb cu $\|BD\| = 2\|AC\|$, iar fețele laterale ASB, BSC, CSD, DSA sînt triunghiuri isoscele congruente; determinați volumul piramidei cunoscînd că aria sa laterală este 6 și că unghiul format de două dintre muchiile laterale este obtuz.

34. Fie $[SABCD]$ o piramidă a cărei bază este un romb. Dacă $|SA| \equiv |AB|$ și $\widehat{BAC} \in 60°$, să se arate că: $\|SC\|^2 = \|BS\|^2 + \|DS\|^2$.

35. Baza piramidei $[SABCD]$ este un trapez, $AB \| CD$. Să se arate că volumul ei este 4/3 din produsul ariei secțiunii $[SMN]$ cu distanța de la dreapta AB la planul (SMN), unde $|MN|$ este linie mijlocie în trapezul $ABCD$.

36. Fie $[SABCD]$ o piramidă patrulateră oarecare. Arătați că măsura oricăruia dintre unghiurile $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSD}$, $\widehat{DSA}$ este mai mică decît suma măsurilor celorlalte trei.

37. În piramida hexagonală regulată $[SA_1A_2A_3A_4A_5A_6]$, O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului SA_1A_4, iar O_2 este centrul cercului circumscris triunghiului SA_1A_2. Arătați că dreapta O_1O_2 este perpendiculară pe planul (SA_1A_2).

38. Fie $[SA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n]$ o piramidă regulată, O centrul poligonului regulat $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. Știind că: $m(\widehat{SA_iO}) = \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și că măsura unghiului diedru format de orice față laterală a piramidei cu planul bazei este β, arătați că:

1) Măsurile unghiurilor triunghiului SA_iA_j sînt

$$\arccos\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\alpha\right),\quad \arccos\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\alpha\right),\quad \pi - 2\arccos\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\alpha\right).$$

2) $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right)$.

39. Un cub este secționat cu un plan care trece printr-o diagonală a sa. Cum trebuie să secționăm cubul pentru ca aria secțiunii să fie minimă?

40. Într-o piramidă patrulateră regulată măsura unui unghi diedru de la bază este 60. Arătați că planul bisector al acestui unghi este perpendicular pe fața opusă.

41. Bazele superioară și inferioară ale unui poliedru sînt poligoane situate în plane paralele aflate la distanță H. Fețele laterale sînt trapeze, triunghiuri sau paralelograme. Să se arate că volumul poliedrului este:

$$V = \frac{H}{6}(B_1 + B_2 + 4B_3)$$

unde B_1, B_2 sînt ariile bazelor, B_3 aria secțiunii medii paralelă cu bazele. (Formula celor trei nivele a lui *Simpson.*)

Scanned with OKEN Scanner

42. Poliedrul convex $[P]$ se numește semiregulat dacă fețele sale sînt poligoane regulate, iar unghiurile sale sînt congruente. Arătați că:

1) Mijloacele muchiilor unui cub sînt vîrfurile unui poliedru semiregulat (numit cubooctaedru).

2) Mijloacele muchiilor unui icosaedru regulat sînt vîrfurile unui poliedru semiregulat (numit icosaedrododecaedru).

43. Baza unei prisme oblice este un trapez. Arătați că volumul prismei este:

$$V = 1/2 \cdot (S_1 + S_2)h$$

unde S_1, S_2 sînt ariile fețelor laterale care conțin bazele trapezului, h distanța dintre ele.

44. Fie $[ABCD]$ o piramidă în care $|AB| \perp |CD|$, iar perpendiculara comună a dreptelor AB și CD intersectează pe $|AB|$ în M și pe $|CD|$ în N. În piramidă se înscrie un cub astfel încît patru muchii ale cubului sînt paralele cu MN și pe fiecare față a piramidei sînt exact două vîrfuri ale cubului. Arătați că lungimea muchiei cubului este $(1/a + 1/b + 1/c)^{-1}$ unde $a = \|AB\|$, $b = \|CD\|$, $c = \|MN\|$.

45. Arătați că pentru $n \geqslant 6$, $n \neq 7$, există poliedre care au n muchii.

46. Arătați că aria totală maximă a unui paralelipiped dreptunghic este $L^2/24$, unde L este suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului.

47. Arătați că dacă aria totală a unui paralelipiped dreptunghic este S, atunci suma minimă L a lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului este $2\sqrt{6S}$.

48. Arătați că centrele fețelor unui cub sînt vîrfurile unui octaedru; iar centrele fețelor unui octaedru sînt vîrfurile unui cub.

49. Arătați că mijloacele muchiilor unui tetraedru regulat sînt vîrfurile unui octaedru.

50. Arătați că centrele fețelor unui dodecaedru sînt vîrfurile unui icosaedru, iar centrele fețelor unui icosaedru sînt vîrfurile unui dodecaedru.

51. Cîte cuburi distincte pot fi înscrise într-un dodecaedru astfel încît vîrfurile fiecărui cub să fie vîrfuri ale dodecaedrului dat?

52. Dodecaedrul rombic este un poliedru care are 14 vîrfuri astfel încît 8 dintre ele sînt vîrfurile unui cub, iar celelalte 6 sînt punctele simetrice cu centrul acestui cub în raport cu fețele sale. Determinați numărul fețelor și muchiilor dodecaedrului rombic.

53. Arătați că dreapta care trece prin centrele a două fețe opuse ale unui octaedru regulat este perpendiculară pe planele acestor fețe.

54. În paralelipipedul $[ABCDA_1B_1C_1D_1]$ baza $ABCD$ este romb și $\widehat{A_1AD} \equiv \widehat{A_1AB}$. Arătați că o secțiune diagonală a paralelipipedului este dreptunghi, iar cealaltă secțiune diagonală este perpendiculară pe planul $(ABCD)$.

55. Să se arate că un octaedru regulat poate fi secționat cu un plan astfel încît secțiunea să fie un hexagon regulat.

Scanned with OKEN Scanner

56. Să se arate că un poliedru $[W]$ este paralelipiped dacă și numai dacă:

1) $[W]$ are un centru de simetrie.

2) Secțiunea poliedrului $[W]$ cu un plan ce trece prin centrul de simetrie și printr-o muchie este paralelogram, pentru orice muchie.

3) Există un vîrf al poliedrului $[W]$ care este situat exact pe trei muchii.

57. Arătați că figura formată din două drepte neparalele și neconcurente are trei axe de simetrie.

58. Arătați că cubul are un centru de simetrie, 9 plane de simetrie, 13 axe de rotație, 9 axe de simetrie. Arătați că tetraedrul regulat are patru axe de rotație, 3 axe de simetrie și 6 plane de simetrie.

59. Construiți un tetraedru care satisface una dintre următoarele condiții: 1) are două plane de simetrie; 2) are o axă de simetrie; 3) are trei axe de simetrie.

60. Fețele $[ABC]$ și $[ABD]$ ale tetraedrului $[ABCD]$ au aceeași arie. Arătați că perpendiculara comună a muchiilor $|AB|$ și $|CD|$ trece prin mijlocul muchiei $|CD|$.

61. Planele α, β, γ se intersectează în punctul A. Construiți planul δ astfel încît $(S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha)(\delta) = \delta$ unde prin S_α am notat simetria în raport cu planul α.

62. Se consideră în spațiu trei puncte necoliniare O, A și B. Prin punctul O se duc planele α și β, perpendiculare pe OA, respectiv OB. Se notează $d = \alpha \cap \beta$ și se duce prin O un plan π perpendicular pe OP, punctul P fiind situat pe dreapta AB. Să se arate că planul π se rotește în jurul dreptei d cînd P descrie AB.

63. Fie O un punct fixat în spațiul $\mathcal{S}$ și k un număr real nenul. Se consideră o aplicație $F: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ care aplică O în O și un punct oarecare A în punctul $A' = F(A)$ situat pe dreapta OA astfel încît:

a) dacă $k > 0$, A' este pe semidreapta $|OA$, iar dacă $k < 0$ avem $O \in |AA'|$;

b) $\|OA'\| = |k| \cdot \|OA\|$.

O astfel de aplicație se numește *omotetie în spațiu de centru O și raport k.* Să se arate că:

1) Restricția lui F la un plan π care trece prin O este o omotetie în planul π de centru O și raport k. 2) F aplică un plan π care nu trece prin O într-un plan $\pi' = F(\pi)$ paralel cu π.

64. Se dau trei plane α, β, γ concurente în P și trei puncte în spațiu A, B, C. Să se găsească locul geometric al centrului unei omotetii F în spațiu astfel încît $F(A) \in \alpha$, $F(B) \in \beta$ și $F(C) \in \gamma$.

65. Fie a și b două drepte neparalele care nu se intersectează iar a_1 și b_1 alte două drepte neparalele care nu se intersectează, paralele cu a, respectiv b. Arătați că există o omotetie sau o translație care transformă pe a în a_1 și pe b în b_1.

66. Fie α și β două plane în spațiu și O un punct care nu aparține niciunuia din cele două plane. Să se găsească locul geometric al dreptei d care trece prin O și ale cărei puncte de intersecție cu cele două plane, $\{A\} = d \cap \alpha$, $\{B\} = d \cap \beta$, verifică relația:

$$\|OB\| = |k| \cdot \|OA\|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XII

CORPURI ROTUNDE

1. Vîrfurile A, B și D_1 ale cubului $[ABCDA_1B_1C_1D_1]$ sînt situate pe suprafața laterală a unui cilindru, a cărui axă este paralelă cu dreapta DC_1. Arătați că $R = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$, R fiind raza cilindrului, iar a lungimea muchiei cubului.

2. Laturile unui trapez isoscel sînt tangente la suprafața laterală a unui cilindru astfel încît axa cilindrului este perpendiculară pe bazele trapezului. Determinați măsura unghiului format de axa cilindrului cu planul trapezului știind că lungimile bazelor sînt a și b, iar înălțimea trapezului este h.

3. Un cub are muchia de lungime a. Două vîrfuri ale cubului sînt centrele bazelor unui cilindru, iar celelalte vîrfuri sînt situate pe suprafața laterală a cilindrului. Arătați că volumul cilindrului este egal cu $\frac{2}{\sqrt{3}}a^3$.

4. Vîrfurile unui dreptunghi sînt situate pe suprafața laterală a unui cilindru. Arătați că două laturi paralele ale dreptunghiului sînt perpendiculare pe axa cilindrului.

5. Un vîrf al unui tetraedru regulat este situat pe axa unui cilindru, iar alte două vîrfuri sînt situate pe suprafața laterală a cilindrului. Arătați că muchia tetraedrului are lungimea $\frac{\sqrt{11}}{3}R$ sau $\sqrt{3}R$, R fiind raza cilindrului.

6. Un cilindru de rază r, și înălțime $5r$ este înscris într-un paralelipiped astfel încît raportul volumelor lor este $\frac{5}{\pi}$. Arătați că intersecția diagonalelor mari ale paralelipipedului cu cilindrul sînt segmente de lungime $3r$.

7. Să se calculeze raza bazei unui con circular drept cu aria laterală A și înălțimea h cunoscute.

8. Trei conuri congruente au același vîrf, sînt tangente două cîte două și sînt tangente la un plan. Arătați că unghiul la vîrf al acestor conuri are măsura $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Două conuri au același vîrf. Măsurile unghiurilor la vîrf ale celor două conuri sînt $\arccos \frac{1}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$, iar o generatoare a primului con este axă a celuilalt con. Arătați că măsura unghiului format de generatoarele după care se intersectează suprafețele laterale ale celor două conuri este $\frac{\pi}{3}$.

10. Vîrfurile A, B și C ale unui tetraedru regulat $[ABCD]$ sînt situate pe suprafața laterală a unui con, vîrful D se află pe baza conului, iar dreapta AD este perpendiculară pe planul bazei conului. Măsura unghiului la vîrf al conului este 90, iar raza bazei R. Determinați lungimea muchiei tetraedrului.

Scanned with OKEN Scanner

11. Vîrfurile unui dreptunghi sînt situate pe suprafața laterală a unui con. Arătați că două laturi paralele ale dreptunghiului sînt perpendiculare pe axa conului.

12. Două conuri congruente au același vîrf și sînt tangente. Fiecare față a unui unghi diedru de măsură 2α este tangentă la suprafețele laterale ale celor două conuri. Determinați măsurile unghiurilor la vîrf ale conurilor.

13. Fețele unui unghi diedru a cărui măsură este α, sînt tangente la suprafața laterală a unui con. Axa conului face cu muchia unghiului diedru un unghi de măsură β. Arătați că:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\beta \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

unde γ este măsura unghiului la vîrf al conului.

14. Baza unui con coincide cu baza unui cilindru, iar vîrful său este centrul celeilalte baze a cilindrului. Să se determine măsura unghiului format de axa conului și o generatoare a sa, știind că raportul ariilor lor totale este $\frac{7}{4}$.

15. Prin vîrful unui con trece un plan care face cu planul bazei conului un unghi de măsură α și intersectează baza conului după coarda $|AB|$ de lungime a. Cunoscînd $m(\widehat{AOB}) = \beta$, unde O este centrul bazei conului, să se arate că volumul conului este egal cu $\frac{\pi a^3}{24} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin^3\frac{\beta}{2}}$.

16. Raportul razelor bazelor unui trunchi de con circular drept este 2. Vîrfurile A, B, B_1, A_1 ale prismei regulate $[ABCA_1B_1C_1]$ sînt situate pe cercul bazei mari, iar vîrfurile C și C_1 pe cercul bazei mici. Arătați că raportul volumelor trunchiului de con și prismei este $\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$.

17. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor $3r$ și $7r$. Vîrfurile S și A ale piramidei regulate $[SABC]$ sînt situate pe cercul bazei mici, iar vîrfurile B, C pe cercul bazei mari. Calculați volumul piramidei.

18. Dacă o sferă este înscrisă într-un tetraedru astfel încît muchiile tetraedrului să fie tangente sferei atunci sumele lungimilor muchiilor opuse sînt egale.

19. Fie n puncte în spațiu $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca punctele date să fie coplanare este să existe un punct M astfel încît sferele de diametre $|MA_1|, |MA_2|, \ldots, |MA_n|$ să mai aibă un punct comun (distinct de M).

20. Trei sfere de rază r sînt tangente la planul α și sînt tangente două cîte două. Dreapta d este paralelă cu planul α și este tangentă la fiecare sferă. Determinați distanța de la dreapta d la planul α. Cîte drepte sînt tangente la cele trei sfere?

Scanned with OKEN Scanner

21. Patru sfere sînt tangente două cîte două și au centrele necoplanare. Pentru fiecare pereche de sfere se consideră planul perpendicular pe linia centrelor și tangent la cele două sfere. Arătați că cele șase plane obținute au un punct comun.

22. Fie V volumul tetraedrului $[ABCD]$, S aria sa totală, S_1, S_2, S_3, S_4 ariile fețelor sale, r raza sferei înscrisă în $[ABCD]$, r_1, r_2, r_3, r_4 razele sferelor exînscrise, tangente fețelor de arii S_1, respectiv S_2, S_3, S_4. Să se arate că:

1) $r = \frac{3V}{S}$; 2) $r_1 = \frac{rS}{S_2 + S_3 + S_4 - S_1}$; 3) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{r}$.

23. Fie $[SABCD]$ o piramidă a cărei bază $ABCD$ este un dreptunghi. Fie H punctul de intersecție al diagonalelor sale și să presupunem că: $m(\widehat{HAS}) = m(\widehat{HBS}) = m(\widehat{HCS}) = m(\widehat{HDS}) = \varphi$ și $m(\widehat{AHB}) = \alpha$. Cunoscînd raza R a sferei $\mathcal{S}(O, R)$ circumscrise piramidei să se determine distanța de la O la planul $(ABCD)$ și volumul piramidei.

24. O sferă este înscrisă într-un con. Să se arate că volumele lor sînt proporționale cu ariile lor totale.

25. Fie $\mathcal{S}(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$ trei sfere astfel încît $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, fiecare sferă fiind tangentă la celelalte două și toate tangente la un plan. Arătați că:

$$r_3 \geqslant \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}.$$

26. Muchiile $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|AD|$ ale tetraedrului $[ABCD]$ sînt tangente unei sfere. Arătați că punctele de tangență sînt coplanare.

27. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară regulată, astfel încît $\|AB\| = a$, $\|AS\| = b$. Planele (ABS) și (ACS) sînt tangente la sfera $\mathcal{S}(O_1, r_1)$ în punctele B și C respectiv, iar planele (ACS) și (BCS) sînt tangente la sfera $\mathcal{S}(O_2, r_2)$ în punctele A și B respectiv. Arătați că: $v[SBO_1O_2] = \frac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

28. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară regulată. Sfera $\mathcal{S}(O, r)$ trece prin A și este tangentă la muchiile $|SB|$, $|SC|$ în punctele B', respectiv C', astfel încît B' și C' sînt mijloacele acestor muchii; să se calculeze raza r a sferei în funcție de $\|AB\| = a$, $\|AS\| = a\sqrt{2}$.

29. În sfera $\mathcal{S}(O, r)$ se înscrie un tetraedru regulat. Planele fețelor tetraedrului intersectează sfera după cercuri, iar cercurile se intersectează formînd pe sferă poligoane sferice cu două și cu trei laturi. Calculați ariile lor.

30. Sfera $\mathcal{S}(O, r)$ este tangentă la toate muchiile piramidei triunghiulare $[SABC]$. Fie K proiecția lui S pe planul (ABC); presupunem că $O \in [SK]$ astfel încît $\|SO\| = r\sqrt{3}$. Arătați că piramida este regulată și că $\|SK\| = \frac{4}{3} r\sqrt{3}$.

31. Fie $[ABCDA'B'C'D']$ un cub astfel încît $\|AB\| = a$ și fie E mijlocul muchiei $|AA'|$. Fie $F \in AD$ astfel încît $\|AF\| = \frac{a}{2}$, $F \notin [AD]$. Să se determine raza celei mai mici sfere care trece prin punctele E și F și este tangentă la planele $(BB'C'C)$ și $(DD'C'C)$.

Scanned with OKEN Scanner

32. Se consideră patru sfere congruente astfel încît fiecare sferă este tangentă cu celelalte trei. A cincea sferă este tangentă exterior cu aceste patru sfere, iar a şasea sferă este tangentă interior; arătaţi că raportul volumelor sferelor a şasea şi a cincea este $485 - 198 \cdot \sqrt{6}$.

33. În sfera $\mathcal{S}(O, R)$ sînt înscrise opt sfere congruente $\mathcal{S}(O_i, r)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ astfel încît fiecare sferă $\mathcal{S}(O_i, r)$ este tangentă cu trei sfere din cele opt şi cu sfera $\mathcal{S}(O, R)$, iar poliedrul $[O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8]$ este un cub. Arătaţi că $R = (\sqrt{3} + 1)r$.

34. Într-un unghi diedru de măsură 2α se înscriu două sfere de rază r tangente. O altă sferă este înscrisă în unghiul diedru şi este tangentă cu primele două sfere. Calculaţi raza ei.

35. În sfera $\mathcal{S}(O, r)$ se consideră coarda $|AB|$ şi diametrul $|CD|$ astfel încît $\|AB\| = r$, $\|AC\| = \sqrt{2}r$, $|BC| > |AC|$, iar măsura unghiului format de către dreptele AB şi CD este 60. Arătaţi că $\|BD\| = r$.

36. Fie $[SABCD]$ o piramidă astfel încît baza $ABCD$ este un patrulater convex cu diagonalele perpendiculare. Proiecţia lui S pe planul $(ABCD)$ este punctul O, intersecţia diagonalelor patrulaterului $ABCD$. Arătaţi că proiecţiile lui O pe feţele laterale ale piramidei sînt situate pe un cerc.

37. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară regulată a cărei înălţime are lungimea h. Vîrful S şi ortocentrele feţelor laterale ASB, BSC şi CSA sînt situate pe o sferă de rază r. Determinaţi volumul piramidei.

38. Fie $[ABCD]$ o piramidă triunghiulară oarecare, în care cunoaştem ariile p şi q ale feţelor $[ABC]$ şi $[ABD]$ şi măsura α a unghiului diedru format de către feţele $[ABC]$ şi $[ABD]$. Să se determine aria secţiunii obţinute prin intersecţia piramidei cu planul ce trece prin muchia $|AB|$ şi prin centrul sferei înscrise în piramidă.

39. Fie $\mathcal{S}(O, r)$ o sferă şi $[\widehat{SXYZ}]$ un triedru astfel încît dreptele SX, SY, SZ sînt tangente la sfera $\mathcal{S}(O, r)$, $\widehat{XSY} \equiv \widehat{YSZ} \equiv \widehat{ZSX}$, iar planele (XSY), (YSZ), (ZSX) intersectează sfera $\mathcal{S}(O, r)$ după cercuri de rază R. Să se determine raza sferei ştiind că $m(\widehat{XSY}) = \alpha$.

40. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară. Presupunem că $|AC| \perp |BC|$, $m(\widehat{BAC}) = 60$, $\|BD\| = 2$ şi că măsura unghiului diedru format de feţele $[BCD]$ şi $[ABC]$ este 60. O sferă al cărui centru O este proiecţia vîrfului S pe planul (ABC) este tangentă la muchiile $|AB|$ şi $|AC|$ şi la planul (BCS). Să se determine lungimea muchiei $|AC|$, dacă O este interior triunghiului ABC.

41. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară în care $|AB| \equiv |AC|$ şi $SA \perp (ABC)$. Ştiind că $\|BC\| = a$ şi că măsurile unghiurilor diedre de muchii $|SA|$ respectiv $|BC|$ sînt 2α şi β, să se calculeze raza sferei circumscrise piramidei $[SABC]$.

42. Într-un tetraedru regulat se înscrie o sferă, iar în sferă se înscrie un tetraedru regulat; arătaţi că raportul volumelor celor două tetraedre este $\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

43. Se consideră două sfere concentrice de raze r și R, $R > r$. Vîrfurile B, C, D ale tetraedrului $[ABCD]$ sînt situate pe sfera mare, iar fețele $[ABC]$, $[ACD]$, $[ABD]$ sînt tangente la sfera mică. Arătați că $R \geqslant \sqrt{3} \cdot r$.

44. Fie $[SABC]$ o piramidă astfel încît $|AS| \perp |BS|$, $|BS| \perp |CS|$, $|CS| \perp |AS|$, $|AC| \equiv |BC|$, iar unghiul dintre muchia $[CS]$ și planul (ABC) are măsura 45. Arătați că există patru sfere înscrise în triedrul $[\widehat{CBAS}]$ și tangente la sfera de diametru $\|AB\| = 2r$.

45. Pe o sferă de rază r sînt situate trei cercuri de rază $r/2$, astfel încît fiecare cerc este tangent la celelalte două. Să se determine razele cercurilor situate pe sferă și care sînt tangente cu cele trei cercuri date.

46. În interiorul unui cub de latură 9 se consideră 1980 de puncte. Să se demonstreze că există două cu proprietatea că distanța dintre ele este mai mică decît 1.

47. Un plan intersectează o sferă după un cerc căruia i se circumscrie un exagon regulat. Să se calculeze raza R a sferei, știind latura l a hexagonului și raportul $k > 1$ al ariilor calotelor determinate de planul dat în sferă.

48. În interiorul unui cilindru sînt situate patru sfere de raze egale, astfel încît fiecare sferă este tangentă la celelalte trei și la suprafața laterală a cilindrului; două sfere sînt tangente la una din bazele cilindrului, iar celelalte două la cealaltă bază a cilindrului. Determinați volumul cilindrului cunoscînd volumul V al unei sfere.

49. Măsura unghiului la vîrf al unui con este $\frac{\pi}{3}$. În interiorul său se găsesc trei sfere de rază r astfel încît fiecare sferă este tangentă cu celelalte două, cu baza conului și cu suprafața sa laterală. Determinați raza bazei conului.

50. Fie AB o dreaptă care nu intersectează sfera $\mathcal{S}(O, r)$ iar P proiecția lui O pe AB. Presupunem că P este situat între A și B și $\|AP\| > r$, $\|BP\| > r$. Notăm cu X mulțimea triunghiurilor ABC cu proprietatea că dreptele AC și BC sînt tangente sferei $\mathcal{S}(O, r)$. Arătați că $T \in X$ are perimetru maxim dacă și numai dacă are arie maximă.

51. Într-un con se înscrie o sferă, astfel încît cercul de tangență dintre ele este baza unui cilindru înscris în sferă. Raportul dintre aria sferei și aria conului este 4/9. Arătați că raportul dintre volumul cilindrului și volumul conului este 1/4 sau 16/125.

52. Pe o sferă $\mathcal{S}(O, r)$ sînt situate trei cercuri congruente de rază $r/2$, astfel încît fiecare cerc este tangent cu celelalte două. Determinați razele cercurilor situate pe sferă și care sînt tangente celor trei cercuri.

53. Se consideră în spațiu trei sfere exterioare două cîte două. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care intersectează cele trei sfere după cîte un cerc mare.

54. Se consideră o sferă $\mathcal{S}(O, R)$ și două plane paralele α și β care intersectează sfera și au distanța între ele a. Să se găsească distanța de la centrul sferei la planul α știind că aria zonei sferei determinată de cele două plane este egală cu suma ariilor cercurilor de intersecție ale planelor cu sfera. Discuție.

Scanned with OKEN Scanner

55. Dreptunghiul $ABCD$ se rotește cu un unghi de măsură 90 în jurul diagonalei $|BD|$. Notînd cu $A'B'C'D'$ dreptunghiul obținut după rotație, calculați distanța de la A la A'.

56. Fie $[SABC]$ o piramidă astfel încît $|SC| \equiv |AB|$ și muchia $|SC|$ este înclinată față de planul (ABC) cu un unghi de măsură 60. Presupunem că vîrfurile A, B, C și mijloacele muchiilor $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$ sînt situate pe o sferă de rază 1. Arătați că centrul sferei este situat pe muchia $|AB|$ și calculați lungimea înălțimii piramidei.

57. În tetraedrul $[ABCD]$ avem: $|AB| \equiv |CD|$ și $|BC| \equiv |AD|$. Arătați că centrul sferei înscrise în tetraedru, centrul sferei circumscrise tetraedrului și centrul de greutate sînt situate pe dreapta ce trece prin mijloacele muchiilor $|AC|$ și $|BD|$.

58. Fie $|DF|$ linie mijlocie în triunghiul ABC, $DF \parallel BC$. Triunghiul ABC se rotește în jurul dreptei BC. Să se arate că $v[ADF] = \frac{1}{2} v[ABC]$, unde prin $v[ADF]$ se înțelege volumul figurii obținute prin rotirea triunghiului ADF.

59. Se consideră în spațiu două cercuri neconcurente și cîte un punct pe fiecare din ele. Să se construiască un al treilea cerc care să aibă cu fiecare dintre cele două cercuri date cîte o pereche de puncte comune, fiecare pereche conținînd cîte unul din punctele date. Discuție.

60. Două cercuri necongruente sînt situate în plane paralele distincte. Arătați că există două omotetii care transformă un cerc în celălalt. Arătați că există două omotetii care transformă o sferă într-o sferă necongruentă cu prima.

61. Fie k un număr real nenul și O un punct fixat în spațiul $\mathcal{S}$. Se consideră aplicația $F : \mathcal{S} \setminus \{O\} \to \mathcal{S} \setminus \{O\}$ care aplică punctul A în punctul $A' = F(A)$ situat pe dreapta OA astfel încît:

a) dacă $k > 0$, A' este situat pe semidreapta $|OA$, iar dacă $k < 0$ punctul O este între A și A'.

b) $\|OA\| \|OA'\| = |k|$.

(O astfel de aplicație se numește *inversiune în spațiu de pol O și putere k).*

Să se arate că:

1) $F \circ F$ este aplicația identică.

2) Dacă un plan π trece prin O, $\pi \setminus \{O\}$ se transformă în $\pi \setminus \{O\}$ și restricția lui F la $\pi \setminus \{O\}$ este o inversiune în acest plan de pol O și putere k.

3) Un plan π care nu trece prin O se transformă într-o sferă care trece prin O. Să se determine centrul și raza acestei sfere.

4) O sferă care nu trece prin O se transformă într-o sferă care nu trece prin O.

62. Fie $\mathcal{S}(O, r)$ o sferă, $|AB|$ un diametru și π planul care trece prin O și este perpendicular pe AB. Se consideră aplicația $F : \mathcal{S}(O, r) \setminus \{A\} \to \pi$ care asociază unui punct de pe sferă punctul $P' = F(P)$ din π astfel că $P' = \pi \cap AP$. Analog se consideră aplicația $G : \mathcal{S}(O, r) \setminus \{B\} \to \pi$ care asociază unui punct P punctul $F(P) = P'' = \pi \cap BP$. Să se arate:

1) F și G sînt restricțiile inversiunilor din spațiu de putere $2r^2$ și de poli A, respectiv B la sfera dată.

2) Aplicația $P' \to P''$ este o inversiune în planul π de pol O și putere r^2.

Scanned with OKEN Scanner

63. Se dau două sfere $\mathcal{S}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{S}_2(O_2, r_2)$ exterioare, astfel că $r_1 \neq r_2$. Să se arate că există două inversiuni în spațiu care transformă o sferă în cealaltă. Să se arate că există două sfere invariante prin aceste inversiuni, ortogonale sferelor date.

64. Fie un cerc $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ situat pe sfera $\mathcal{S}(O, r)$. Să se construiască o sferă ortogonală sferei $\mathcal{S}(O, r)$ care o intersectează după cercul $\mathcal{C}(O_1, r_2)$.

65. Pe sfera $\mathcal{S}(O, r)$ se consideră cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ care nu se intersectează. Să se arate că există două conuri care conțin cele două cercuri.

66. Se dă un tetraedru $[OABC]$ în care triunghiul ABC este echilateral. Notînd cu V volumul și cu R raza sferei circumscrise tetraedrului să se arate inegalitatea:

$$2V \leqslant RS,$$

unde S este aria triunghiului care se poate forma cu segmentele $|OA|, |OB|$ și $|OC|$ (adică avînd laturile congruente cu aceste segmente).

67. Pe sfera $\mathcal{S}(O, R)$ considerăm punctul fix și punctele mobile M și N distincte. Construim $MP \perp AN$ și $NQ \perp AM (P \in AN, Q \in AM)$.

1) Dacă $m(\widehat{MAN}) \neq 90$ să se arate că dreapta PQ rămîne paralelă cu un plan dat.

2) Să se determine pozițiile punctelor M și N astfel încît $\|OE\|$ să fie maximă $(PQ \cap OA = \{E\})$.

68. Fie $[SABCD]$ o piramidă în care este înscrisă sfera $\mathcal{S}(O, r)$, tangentă la toate fețele piramidei. Baza $ABCD$ a piramidei este un trapez isoscel $(AD \parallel BC)$ în care cunoaștem $\|AB\| = a$ și $m(\widehat{BAD}) = \varphi$. Fețele ASD și BSC sînt triunghiuri isoscele ($|AS| = |SD|$, $|BS| = |SC|$) și formează cu planul bazei unghiuri diedre a căror măsură este α. Să se determine raza r a sferei $\mathcal{S}(O, r)$.

Scanned with OKEN Scanner

Partea a doua

SOLUȚII, INDICAȚII, RĂSPUNSURI

Capitolul I

PROBLEME DE INCIDENȚĂ, ORDONARE ȘI CONGRUENȚĂ ÎN PLAN

1. Există trei puncte necoliniare în plan, pe care să le notăm A, B și C. Dreptele AB, BC, AC sînt trei drepte distincte.

2. Există trei puncte A, B, C care nu sînt coliniare. Dacă P coincide cu unul din ele, atunci punctul P nu aparține dreptei determinate de celelalte două. Presupunem că P nu coincide cu nici unul din punctele A, B și C. Considerăm dreapta PA. Putem avea două situații:

$PA \cap BC = \varnothing$. În acest caz rezultă că P nu aparține dreptei BC. În cazul $PA \cap BC \neq \varnothing$, dacă $P \notin BC$ problema e rezolvată, iar dacă $P \in BC$, $PA \cap BC = \{P\}$. Dar atunci punctul P nu aparține dreptei AB, căci dreapta BC nu poate avea în comun cu dreapta AB două puncte P și B.

3. Un plan conține cel puțin trei puncte pe care să le notăm cu M, N, P. Dacă $A = M$ atunci A se află pe MN. La fel se raționează cînd $A = N$ sau $A = P$. Dacă $A \notin \{M, N, P\}$ atunci A se află pe dreapta AM.

4. Se ține seamă că există în plan trei puncte necoliniare.

8. Fie $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \setminus \Delta$. Conform axiomei I.4 rezultă că există o dreaptă $d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$ astfel încît: $\{A, B\} \subseteq d$. Definim atunci: $f : \mathcal{P}^2 \setminus \Delta \to \mathcal{D}(\mathcal{P})$ prin: $f(A, B) = d$. Din partea de unicitate a axiomei I.4 rezultă că f este bine definită.

9. Construim aplicația:
$h : \mathcal{D}(\mathcal{P}) \to \text{Sub}\,(\mathcal{P})$ definită prin $h(d) = d$ pentru orice dreaptă $d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$. Conform axiomei I.2 $\mathcal{D}(\mathcal{P}) \subseteq \text{Sub}\,(\mathcal{P})$, deci aplicația h este bine definită. Conform axiomei I.3, orice dreaptă este nevidă, deci $h(d) \neq \varnothing$, pentru orice $d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$. Mulțimea $\bigcup_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})} h(d)$ este chiar $\bigcup_{d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})} d$, ori se știe că (exercițiul 5) această reuniune este chiar $\mathcal{P}$. Punctul 3) rezultă imediat din I.4, iar punctul 4) din I.3.

11. 1) $x_A = 0$, $x_C = 1$, $x_B = 2$

2) $x_A = 0$, $x_B = 1$, $x_C = 2$.

12. $\|AB\| \leqslant \|AC\| + \|CB\| \leqslant \|AC\| + \|CD\| + \|DB\|$.

Scanned with OKEN Scanner

13. A este mijlocul segmentului $|BC|$ deci

$$x_A = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 2x_A - x_B = 2a - b.$$

15. Fie $d \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$ şi $A, B \in d$, $A \neq B$. Conform axiomei R, urmează că există $f: d \to \mathbf{R}$, un sistem de coordonate pe d, adică o funcţie bijectivă cu proprietăţile: $f(A) = 0, f(B) > 0$ şi $\|PQ\| = |x_Q - x_P|$, unde s-a notat $f(P) = x_P$, pentru orice $P \in d$ şi $\|PQ\| = \delta(P, Q)$, unde $\delta: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ este distanţa fundamentală în planul $\mathcal{P}$. Vom avea: $\|AB\| = |x_B - x_A| = |x_B| = x_B > 0$, prin urmare $\|AB\|$ este nenul pozitiv. Urmează că aplicaţia:

$$\delta_{AB}: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbf{R}, \quad \delta_{AB}(P, Q) = \frac{\|PQ\|}{\|AB\|}$$

pentru orice $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, este bine definită şi avem $\delta_{AB}(P, Q) \geqslant 0$.

1) Întrucît $\|PQ\| = \|QP\|$ avem $\frac{\|PQ\|}{\|AB\|} = \frac{\|QP\|}{\|AB\|}$ şi deci $\delta_{AB}(P, Q) = \delta_{AB}(Q, P)$.

2) Se ştie că $\|PQ\| = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

Dar $\|PQ\| = 0 \Leftrightarrow \delta_{AB}(P, Q) = 0$, de unde rezultă că $\delta_{AB}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

3) Avem $\|PR\| \leqslant \|PQ\| + \|QR\| \Rightarrow$

$$\frac{\|PR\|}{\|AB\|} \leqslant \frac{\|PQ\|}{\|AB\|} + \frac{\|QR\|}{\|AB\|} \Rightarrow \delta_{AB}(P, R) \leqslant \delta_{AB}(P, Q) + \delta_{AB}(Q, R).$$

4) Fie aplicaţia $g: d \to \mathbf{R}$ definită prin $g(P) = \frac{x_P}{\|AB\|}$ pentru orice $P \in d$. Vom avea:

$$g(A) = \frac{x_A}{\|AB\|} = 0 \text{ şi } g(B) = \frac{x_B}{\|AB\|} = \frac{\|AB\|}{\|AB\|} = 1.$$

5) $$|g(P) - g(Q)| = \left| \frac{x_P}{\|AB\|} - \frac{x_Q}{\|AB\|} \right| = \frac{|x_P - x_Q|}{\|AB\|} = \frac{\|PQ\|}{\|AB\|} = \delta_{AB}(P, Q).$$

6) Să arătăm că g este injectivă.

Într-adevăr fie $g(P) = g(Q) \Rightarrow \frac{x_P}{\|AB\|} = \frac{x_Q}{\|AB\|} \Rightarrow x_P = x_Q \Rightarrow P = Q$.

Pentru surjectivitate fie $\xi \in \mathbf{R}$. Cum $\xi\|AB\| \in \mathbf{R}$ şi f este surjectivă, există un punct $P \in d$ astfel încît: $f(P) = \xi\|AB\|$. Atunci

$$g(P) = \frac{x_P}{\|AB\|} = \frac{\xi \cdot \|AB\|}{\|AB\|} = \xi.$$

16. 1) φ este o bijecţie ca o compunere de funcţii bijective.

$$\varphi(0) = (g \circ f^{-1})(0) = (g \circ f^{-1})(x_A) = g(A) = y_A;$$

$$\varphi(x_C) = (g \circ f^{-1})(x_C) = g(C) = y_C = 0;$$

$$f(P) = x_P \Rightarrow P = f^{-1}(x_P) \Rightarrow g(P) = (g \circ f^{-1})(x_P) \Rightarrow (1)\ y_P = \varphi(x_P).$$

Formula (1) se numeşte formula de trecere de la coordonata x_P la coordonata y_P a punctului $P \in d$.

Scanned with OKEN Scanner

2) $y_D = |y_D| = |y_D - y_C| = \|CD\| = |x_D - x_C|$;

$x_B = |x_B| = |x_B - x_A| = \|AB\| = |y_B - y_A|$.

3) ψ este bijecție, ca o compunere de funcții bijective.

4) $\varphi = g \circ f^{-1} \Rightarrow \varphi = f \circ f^{-1} \circ g \circ f^{-1}$, deoarece $f \circ f^{-1} \leq I_d$, unde $I_d : d \to d$ este aplicația identică a mulțimii d; atunci: $\varphi = f \circ (g^{-1} \circ f)^{-1} \circ f^{-1} \Rightarrow \varphi = f \cdot \psi^{-1} \circ f^{-1} \Rightarrow \varphi \circ f = f \circ \psi^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi \circ f \circ \psi = f$, unde am folosit formula: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ pentru două aplicații f, g pentru care compunerile au sens. Analog, obținem $\psi = g^{-1} \circ f \Rightarrow$ $\Rightarrow \psi = g^{-1} \circ f \circ g^{-1} \circ g \Rightarrow \psi = g^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1} \circ g \Rightarrow \psi = g^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ g \Rightarrow g \circ \psi =$ $= \varphi^{-1} \circ g \Rightarrow \varphi \circ g \circ \psi = g$.

17. Condițiile: $\|AM\| = \alpha$, $\|MN\| = \beta$, $\|NB\| = \gamma$ se pot scrie: $|x_M - x_A| = \alpha$, $|x_N - x_M| = \beta$, $|x_B - x_N| = \gamma$. Sau notînd necunoscutele x_M, x_N cu x și y obținem sistemul:

$$\begin{cases} |x - \lambda| = \alpha \\ |y - x| = \beta \\ |\mu - y| = \gamma \end{cases}$$

Distingem următoarele cazuri:

1) $x \geqslant y$. Atunci $|y - x| = -y + x$ și obținem ecuația:

(1) $$-y + x = \beta$$

Distingem următorul subcaz:

1. a). $x \geqslant \lambda$. Atunci $|x - \lambda| = x - \lambda$ și obținem ecuația $x - \lambda = \alpha \Rightarrow x = \alpha + \lambda$. Sau revenind la (1): $y = \alpha + \lambda - \beta$. Condițiile din enunț arată că ultima ecuație a sistemului este verificată de x și y astfel determinați.

1. b). $x < \lambda$. Atunci $|x - \lambda| = -x + \lambda$ și din $-x + \lambda = \alpha$ rezultă $x = \lambda - \alpha$. Revenind la (1) obținem: $y = \lambda - \alpha - \beta$. Se discută în ce condiții x și y astfel determinați constituie o soluție a sistemului; exemplificăm această discuție în cazurile următoare.

1. c) $\mu \geqslant y$ coincide cu cazul I.a.

1. d) $\mu < y$. Atunci: $|\mu - y| = -\mu + y \Rightarrow -\mu + y = \gamma \Rightarrow y = \gamma + \mu$, și din (1): $x = 2\beta + 2\mu - (\alpha + \lambda)$. Se vede că x și y astfel găsiți verifică prima ecuație dacă și numai dacă $\gamma = 0$ $\left(\text{adică trebuie să avem chiar egalitate în enunț: } \frac{\beta + \mu}{\alpha + \lambda} = 1\right)$.

2). $x < y \Rightarrow |y - x| = y - x \Rightarrow y = x + \beta$.

2. a) $x \geqslant \lambda$ $x - \lambda = \alpha \Rightarrow x = \alpha + \lambda \Rightarrow y = \alpha + \beta + \lambda$, $|\mu - \alpha - \beta - \lambda| = |\beta + \mu - (\alpha + \lambda) - 2\beta| = |\gamma - 2\beta|$.

Deci ultima ecuație a sistemului se verifică dacă și numai dacă $\beta = 0$ sau $\gamma = \beta$. Soluția sistemului este în acest caz $(\alpha + \lambda, \alpha + \beta + \lambda)$.

2. b). $x < \lambda$ $-x + \lambda = \alpha \Rightarrow x = \lambda - \alpha \Rightarrow y = \lambda - \alpha + \beta$. $|\mu - \lambda + \alpha - \beta| = |\mu + \beta - (\lambda + \alpha) + 2\alpha - 2\beta| = |\gamma + 2\alpha - 2\beta|$.

Ultima ecuație este deci verificată dacă și numai dacă: sau $\alpha = \beta$ sau $\mu = \lambda$.

2. c). $\mu \geqslant y$. $\mu - y = \gamma \Rightarrow y = -\beta + \lambda + \alpha \Rightarrow x = -2\beta + \lambda + \alpha$ $(-2\beta + \lambda + \alpha, -\beta + \lambda + \alpha)$ este deci soluție dacă și numai dacă sau $\alpha = \beta$ sau $\beta = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. d). $\mu < y$. $-\mu + y = \gamma \Rightarrow y = 2\mu + \beta - (\lambda + \alpha) \Rightarrow x = 2\mu - (\lambda + \alpha)$, $|2\mu - (\lambda + \alpha) - \lambda| = |2\mu - 2\lambda - \alpha|$.
Deci x şi y astfel determinaţi verifică prima ecuaţie a sistemului dacă şi numai dacă: sau $\alpha + \lambda = \mu$ sau $\mu = \lambda$.

18. Presupunem că $a = x_A$, $b = x_B$, $c = x_C$, $d = x_D$, $x = x_M$ şi distingem cinci cazuri:

1) $x \leqslant a$. Atunci $\varphi(x) = \|MA\| + \|MB\| + \|MC\| + \|MD\| = \|AB\| + 2\|MB\| + 2\|BC\| + \|CD\|$. În acest caz $\varphi(x)$ are valoare minimă cînd $M = A$, iar valoarea minimă este $3\|AB\| + 2\|BC\| + \|CD\|$.

2) $a < x \leqslant b$. Atunci $\varphi(x) = \|AM\| + \|MB\| + \|MC\| + \|MD\| = \|AB\| + 2\|MB\| + 2\|BC\| + \|CD\|$.
Valoarea minimă a lui $\varphi(x)$ se atinge pentru $M = B$ şi $\varphi(x_B) = \|AB\| + 2\|BC\| + \|CD\|$.

3) $b \leqslant x \leqslant c$. În acest caz, pentru orice x avem

$$\varphi(x) = \|AB\| + 2\|BC\| + \|CD\|.$$

4) $c \leqslant x < d$. Atunci, valoarea minimă a lui $\varphi(x)$ este

$$\|AB\| + 2\|BC\| + \|CD\| \text{ şi se atinge în } x = c.$$

5) $x \geqslant d$. Valoarea minimă a lui $\varphi(x)$ este $\|AB\| + 2\|BC\| + 3\|CD\|$. pentru $x = d$. Comparînd rezultatele obţinute, vedem că minimul funcţiei $\varphi(x)$ este $\|AB\| + 2\|BC\| + \|CD\|$ sau
$b - a + 2(c - b) + d - c = d + c - b - a$ şi are loc pentru $b \leqslant x \leqslant c$

19. Mijlocul segmentului $|AB|$ are abscisa $\frac{a+b}{2}$ şi aparţine segmentului $|AB|$. Dar cum abscisa determină unic punctul, rezultă că C este mijlocul lui $|AB|$, deci $C \in |AB|$.

20. Avem $x_A < x_B < x_C$; $x_A < x_M < x_B$; $x_B < x_N < x_C$ de unde rezultă $x_M < x_B < x_N$ adică B este între M şi N.

21. 1) $|AB| \cap |BC| = \{M \mid x_M \in (a, b)\} \cap \{M \mid x_M \in (b, c)\} = \varnothing$.
2) $[AB] \cap [BC] = \{M \mid x_M \in [a, b]\} \cap \{M \mid x_M \in [b, c]\} = \{M \mid x_M = b\} = \{B\}$
3) Analog.

22. 1) reflexivitatea:

$$A \mathcal{R}_O A \Leftrightarrow O \notin |AA| = \varnothing, \text{ evident.}$$

2) simetria:

$$A \mathcal{R}_O B \Rightarrow O \notin |AB| \Rightarrow O \notin |BA| \Rightarrow B \mathcal{R}_O A.$$

3) tranzitivitatea: Fie $A, B, C \in d - \{O\}$ cu $x_A < x_B < x_C$ şi

$$\left.\begin{matrix} A \mathcal{R}_O B \\ B \mathcal{R}_O C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} O \notin |AB| \\ O \notin |BC| \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_0 \in (\infty, x_A] \cup [x_B, \infty) \\ x_0 \in (-\infty, x_B] \cup [x_C, \infty) \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 \in \{(-\infty, x_A] \cup [x_B, \infty)\} \cap \{(-\infty, x_B] \cup [x_C, \infty)\} =$$

$$= (-\infty, x_A] \cup [x_C, \infty) \Rightarrow O \notin |AC| \Rightarrow A \mathcal{R}_O C.$$

Analog s-ar trata dacă avem orice altă ordine între punctele A, B, C.

Scanned with OKEN Scanner

24. Conform axiomei R, există un sistem de coordonate $f : d \to \mathbf{R}$ pe dreapta d. Fie $f(A) = x_A$. Există întotdeauna două numere reale ξ, η astfel încît $\xi < x_A < \eta$.

Deoarece f este bijectivă, există și sînt unice punctele B, C situate pe d cu: $x_B = \xi$, $x_C = \eta$, $B \neq C$. Conform unui corolar din manual (pag. 16) urmează că $A \in |BC|$. Definim atunci aplicațiile: $\mathcal{E} : d \to \text{Sub } (d)$, $\mathcal{E}' : d \to \text{Sub } (d)$ prin: $\mathcal{E}(A) = |AC$, $\mathcal{E}'(A) = |AB$, A fiind fixat, dar arbitrar. Conform unui corolar din manual (pag. 19) dacă $D \in |AC \Rightarrow |AC = |AD$, deci $\mathcal{E}$ este bine definită.

Analog se arată că definiția lui $\mathcal{E}'$ nu depinde de alegerea reprezentanților; proprietățile 1), 2) sînt imediate.

25. Fie $M \in |AB \Rightarrow M \in [AM] \Rightarrow M \leqslant M$.

Fie M, N, $P \in |AB$ astfel încît $M \in [AN]$, $N \in [AP]$.

Conform exercițiului **23**, rezultă în particular că $M \in [AP]$, deci că $M \leqslant P$ **(S. Dragomir**, G.M. 2—3/1982).

26. Utilizînd exercițiul **25** urmează că relațiile $\leqslant$, $\geqslant$ sînt reflexive și tranzitive. De aici și din definiția relației $<_d$, se obține soluția exercițiului.

27. Fie, conform axiomei R, un sistem de coordonate $f : d \to \mathbf{R}$ pe dreapta d. Fie numerele $f(A) = x_A$, $f(A') = x_{A'}$, x_A, $x_{A'} \in \mathbf{R}$ și să luăm: $\xi = \min(x_A, x_{A'}) - 1$, $\xi' = \max(x_A, x_{A'}) + 1$. Conform corolarului din pag. 16 (Manual) rezultă că $\{A, A'\} \subseteq |BC|$, unde B, $C \in d$, $B \neq C$, unice cu proprietatea că $x_B = \xi$, $x_C = \xi'$ (deoarece f este bijecție).

28. Avem de analizat trei situații:

1) $A' = A$, clară;

2) $A' \in |AC$;

3) $A' \in |AB$.

În una din situațiile 2) sau 3) avem: $|A'C \subseteq |AC$; dacă de exemplu M, $N \in |A'C$, atunci M, $N \in |AC$ și cum $[AN] \cap |A'C = |A'N| \cup \{N\}$, din $M <_d^A N$ rezultă că $M \in [A'N]$ deci că $M <_d^{A'} N$. Analog pentru alte situații de așezare ale punctelor M, N.

29. Distingem mai multe posibilități de așezare a punctelor M, N, P. Fie $A \in d$ și B, $C \in d$, $A \in |BC|$ cu ajutorul cărora definim relația $<_d$ pe d. Conform exercițiului **26,** definiția nu depinde de alegerea punctelor B și C cu proprietatea că: $A \in |BC|$. De asemenea conform exercițiului **28**, definiția lui $<_d$ nu depinde în mod esențial de alegerea punctului A.

1) M, N, $P \in |AC$

2) $M \in |AB$, N, $P \in |AC$

3) M, N, $P \in |AB$

4) M, $N \in |AB$, $P \in |AC$

5) $M = A$, N, $P \in |AC$

6) $P = A$, M, $N \in |AB$

7) $N = A$, $M \in |AB$, $P \in |AC$

Să analizăm de exemplu cazul 1):

$$M <_d N \Rightarrow M \in [AN] \text{ sau } x_A \leqslant x_N \text{ și atunci}$$

$$x_A \leqslant x_M \leqslant x_N \text{ sau } x_A \geqslant x_N \text{ și atunci } x_A \geqslant x_M \geqslant x_N.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem subcazurile:

I. $x_A \leqslant x_N$ și $x_A \leqslant x_P$.

$\Rightarrow x_A \leqslant x_M \leqslant x_N$ și $x_A \leqslant x_N \leqslant x_P \Rightarrow x_M \leqslant x_N \leqslant x_P$.

II. $x_A \leqslant x_N$ și $x_A \geqslant x_P$.

$\Rightarrow x_A \leqslant x_M \leqslant x_N$ și $x_A \geqslant x_N \geqslant x_P \Rightarrow x_A = x_N \Rightarrow A = N$,

ceea ce contrazice $N \in |AC$.

Deci situația II nu are loc.

III. $x_A \geqslant x_N$ și $x_A \leqslant x_P$.

$x_A \geqslant x_M \geqslant x_N$ și $x_A \leqslant x_N \leqslant x_P \Rightarrow$

$\Rightarrow x_A = x_N \Rightarrow A = N \Rightarrow N \in |AC$, contradicție, deci situația III nu are loc

IV. $x_A \geqslant x_N$ și $x_A \geqslant x_P$.

$\Rightarrow x_A \geqslant x_M \geqslant x_N$ și $x_A \geqslant x_N \geqslant x_P \Rightarrow x_M \geqslant x_N \geqslant x_P$.

31. 1) reflexivitatea: $A \mathcal{R}_d A \Leftrightarrow [AA] \cap d = \varnothing \Leftrightarrow \{A\} \cap d = \varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A \in \mathcal{P} - d$, evident. 2) simetria: $A \mathcal{R}_d B \Rightarrow [AB] \cap d = \varnothing \Rightarrow [BA] \cap d = \varnothing \Rightarrow B \mathcal{R}_d A$ 3) tranzitivitatea: $A \mathcal{R}_d B$ și $B \mathcal{R}_d C$ implică $A \mathcal{R}_d C$, căci dacă A și C ar fi de o parte și de alta a dreptei d, cum A și B sînt de aceeași parte conform axiomei de separare a planului ar rezulta B și C de o parte și de alta a dreptei d, contradicție.

Clasa de echivalență a unui punct $A \in \mathcal{P} - d$ este mulțimea tuturor punctelor situate de aceeași parte a dreptei d cu punctul A, adică semiplanul deschis $|dA$. Așadar clasele de echivalență asociate acestei relații sînt cele două semiplane deschise limitate de dreapta d (fig. I,1).

(M. Țena, G.M. 2—3/1982).

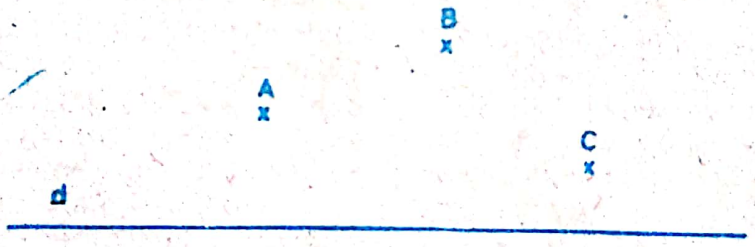


Fig. 1, 1

32. Dacă o asemenea dreaptă ar exista, atunci în fiecare din cele două semiplane limitate de această dreaptă ar exista același număr de vîrfuri.

33. Să considerăm conform axiomei I.4 dreptele: $a = P_1P_2$, $b = P_2P_3$. Să presupunem că P_1, P_2, P_3 sînt necoliniare atunci: $|aP_3 \cap |bP_1 \neq \varnothing$, deci: Int $P_1P_2P_3 \neq \varnothing$. Avem $|P_1P_2| \neq \varnothing$, $|P_2P_3| \neq \varnothing$ și dacă $M \in |P_1P_2|$, $N \in |P_2P_3|$ rezultă $|MN| \subset \text{Int } \widehat{P_1P_2P_3} \Rightarrow |MN| \not\subset [P_1P_2] \cup [P_2P_3]$ deci L n-ar fi convexă, contradicție. Din falsitatea ipotezei de absurd rezultă că P_1, P_2, P_3 sînt coliniare, deci că $L = [P_1P_3]$.

34. Vom demonstra că nu putem numerota laturile poligonului și segmentele $[OA_i]$, $i = 1, \ldots 1000$ astfel încît să fie satisfăcută condiția din enunț. Presupunem că pentru anumite numerotări avem $S_1 = S_2 = \ldots S_{1000} = S$ unde S_1 este suma numerelor asociate laturilor triunghiului OA_1A_2, S_2

a triunghiului OA_2A_3, ... S_{1000} triunghiului $OA_{1000}A_1$. Atunci $1000\,S = S_1 + S_2 + \ldots S_{1000} = 3(1 + 2 + \ldots + 1000) \Rightarrow \frac{3\,003}{2} = S$ ceea ce arată că S nu este număr întreg.

35. Vom demonstra că un poligon convex cu toate diagonalele congruente nu poate avea mai mult de 5 laturi. Fie $A_1, A_2, \ldots A_n$, vîrfurile poligonului și presupunem că $n \geqslant 6$. Considerăm vîrfurile $A_1, A_2, A_{n-2}, A_{n-1}$ (fig. I,2). Segmentele $[A_1A_2]$ și $[A_{n-2}A_{n-1}]$ sînt laturi, iar segmentele $[A_1A_{n-2}]$ și $[A_2A_{n-1}]$ sînt diagonale ale poligonului, deoarece $n \geqslant 6$. În patrulaterul convex $A_1A_2A_{n-2}A_{n-1}$ suma lungimilor diagonalelor $[A_1A_{n-2}]$ și $[A_2A_{n-1}]$ este mai mare decît suma lungimilor a două laturi $[A_1A_{n-1}]$ și $[A_2A_{n-2}]$ceeace contrazice faptul că toate diagonalele poligonului sînt congruente:

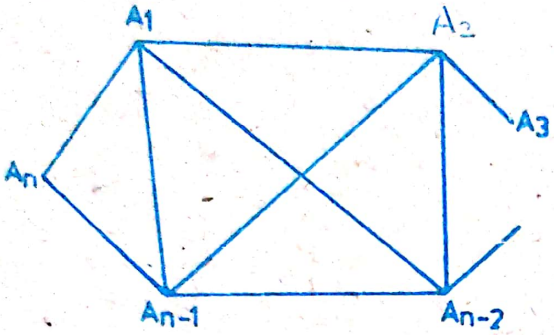


Fig. I,2

$$\| A_1A_{n-1} \| = \| A_1A_{n-2} \| = \| A_2A_{n-1} \| = \| A_2A_{n-2} \|.$$

36. Vom demonstra mai întîi următoarea afirmație: dacă în poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ se duc diagonale astfel încît din fiecare vîrf $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ pornesc diagonale în număr par atunci și din vîrful A_n pornesc diagonale în număr par. Într-adevăr, presupunem că din vîrful A_i, $i = 1, \ldots, n$ pornesc K_i diagonale. Deoarece fiecare diagonală trece prin două vîrfuri, atunci numărul $K_1 + K_2 + \ldots K_n$ este par și deoarece numerele $K_1, K_2, \ldots K_{n-1}$ sînt pare, rezultă că și K_n este par.

Vom demonstra acum că n se divide cu 3 prin inducție matematică după $n \geqslant 3$. Pentru $n = 3$ afirmația problemei este adevărată. Fie acum $n > 3$ și presupunem că afirmația problemei este adevărată pentru toate numerele naturale r, care satisfac inegalitățile $3 \leqslant r < n$. Atunci, dacă o anumită mulțime de diagonale ale poligonului cu r laturi îl partiționează în triunghiuri și sînt satisfăcute condițiile 1) și 2) din enunț, rezultă că r se divide cu 3. Fie D mulțimea diagonalelor unui poligon cu n laturi care îl partiționează în triunghiuri astfel încît sînt satisfăcute condițiile 1) și 2). Presupunem că din vîrful A pornesc cel puțin două diagonale care aparțin mulțimii D. Alegem diagonalele $|AB|$ și $|AC|$ aparținînd mulțimii D astfel încît interiorul unghiului $\widehat{A_1AB}$ să conțină un număr par de diagonale ce pornesc din A și aparțin mulțimii D, iar interiorul unghiului $\widehat{BAC}$ să nu conțină nici o diagonală care pornește din A și aparține mulțimii D. Atunci $|BC| \in D$. Considerăm poligonul $AA_1 \ldots B$. (fig. I,3). Din fiecare vîrf al său, cu excepția poate a lui B, pornesc diagonale în număr par și aparțin mulțimii D. Conform cu ceeace am demonstrat mai sus, rezultă că și din B pornesc diagonale în număr par și aparțin lui D. Afirmații analoage sînt valabile pentru poligoanele $BB_1 \ldots C$ și $CC_1 \ldots A$. Deoarece numărul laturilor

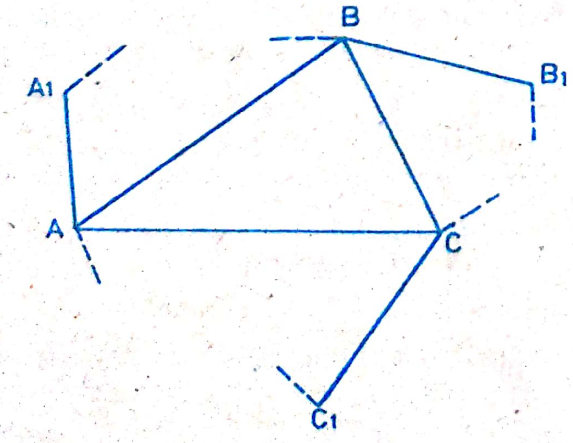


Fig. I, 3

poligoanelor $AA_1, \ldots B$, $BB_1 \ldots C$ și $CC_1 \ldots A$ este mai mic decît n, atunci conform cu ipoteza de inducție numărul laturilor fiecăruia se divide cu 3. Suma numerelor laturilor celor trei poligoane este $n + 3$, deoarece pe lîngă laturile poligonului dat, intră și segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$. Rezultă că n se divide cu 3.

37. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cele n puncte, iar $A_{n+1} = A_1$. Presupunem că linia închisă $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ are lungimea cea mai mică și nu este simplă. Dacă $i \neq j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, atunci notăm $L(A_i, A_j)$ linia poligonală de vîrfuri $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{j-1}, A_j$. Pentru $i = 1, 2, \ldots n$ avem $L(A_i, A_{i+1}) = [A_iA_{i+1}]$. Deoarece linia poligonală $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ nu este simplă, există $1 \leqslant i, j \leqslant n$ astfel încît $[A_iA_{i+1}] \cap [A_jA_{j+1}] = \{P\}$ și $1 < j - i < n - 1$. Rezultă că oricare două dintre punctele $A_i, A_{i+1}, A_j, A_{j+1}$ nu coincid. Astfel punctul P este interior segmentului $[A_iA_{i+1}]$ și $[A_jA_{j+1}]$ deoarece oricare trei dintre punctele $A_1, A_2, \ldots A_n$ nu sînt pe un același segment. Avem $\|A_iA_j\| < \|A_iP\| + \|PA_j\|$, $\|A_{i+1}A_{j+1}\| < \|A_{i+1}P\| + \|PA_{j+1}\|$ deci $\|A_iA_j\| + \|A_{i+1}A_{j+1}\| < \|A_iA_{i+1}\| + \|A_jA_{j+1}\|$. Aceasta înseamnă că linia poligonală închisă $L(A_{j+1}, A_i) \cup [A_iA_j] \cup L(A_j, A_{i+1}) \cup [A_{i+1}A_{j+1}]$ trece prin punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și este mai scurtă decît linia poligonală $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} = L(A_{j+1}, A_i) \cup [A_iA_{i+1}] \cup L(A_{i+1}, A_j) \cup [A_jA_{j+1}]$. Contradicție. Menționăm că o astfel de linie poligonală există deoarece numărul liniilor poligonale care au ca vîrfuri punctele $A_1, A_2, \ldots A_n$ este finit.

38. Fie $L = [P_1P_2] \cup \ldots \cup [P_nP_{n+1}] \cup [P_{n+1}P_1]$ un poligon. Fie d o dreaptă care taie o latură a lui L într-un punct interior. Să presupunem pentru fixarea ideilor că $d \cap [P_1P_2] = \{M\}$. Conform axiomei S, d taie exact încă una din laturile $[P_1P_3]$, $[P_2P_3]$ ale triunghiului $P_1P_2P_3$. Fie A punctul de intersecție al lui d cu $[P_1P_3]$ (sau cu $[P_2P_3]$). A nu poate coincide cu P_1 sau P_2 deoarece în acest caz am avea: $d = P_1P_2$. Conform ex. **4** p. 18 manual $|AM| \subseteq \text{Int } P_1P_2P_3$. Conform ex. **42**, $\text{Int } P_1P_2P_3 \subseteq \text{Int } L$ și $|AM| \subseteq d$, deci d trece prin interiorul lui L.

39. Fie $P = P_1P_2 \ldots P_n$, $A \in \text{Int } P$ și $A \in d$. Afirmăm că d separă cel puțin două vîrfuri consecutive ale poligonului, căci în caz contrar, cu notațiile din ex. **31** am avea $P_1\mathcal{R}_dP_2$, $P_2\mathcal{R}_dP_3$, $\ldots$ $P_n\mathcal{R}_dP_1$ și din tranzitivitatea relației $\mathcal{R}_d$ ar rezulta că $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sînt în același semiplan (deschis) S limitat de dreapta d. Conform problemei **42**, $P \cup \text{Int}P \subset S \Rightarrow A \in S \Rightarrow A \notin D$, fals. Fixînd ideile putem așadar presupune $d \cap [P_1P_n] \neq \varnothing$. Conform probl. 19 p. 21 manual și prob. 20 p. 21 manual, linia poligonală neînchisă $P_1P_2 \ldots P_n$ va mai fi intersectată de d o singură dată.

40. Fie $|OA$ o semidreaptă; conform teoremei de separare, dreapta OA determină exact două semiplane S și S'; U. 2 spune că există și este unică o semidreaptă $|OB$ conținută în semiplanul S astfel încît: $m(\widehat{AOB}) = 120$. Tot din U.2 există și este unică o semidreaptă $|OC$ conținută în semiplanul S' astfel încît: $m(\widehat{AOC}) = 120$; este imediat că $m(\widehat{BOC}) = 120$ etc.

41. Situația este constructibilă cu ajutorul axiomelor de incidență, riglei de separare și axiomei U.2. Fie $|OX$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ și $|OY$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Conform definiției bisectoarei precum și teoremei 8, § 8 $\Rightarrow$ $\Rightarrow |OX \subseteq \text{Int } \widehat{AOC}$, $|OY \subseteq \text{Int } \widehat{BOD}$ (fig. I,4). De asemenea, din construcție urmează că: $|OB \subseteq \text{Int } \widehat{AOC}$, $|OC \subseteq \text{Int } \widehat{BOD}$. Să notăm $OB = a$, $OC = b$.

Scanned with OKEN Scanner

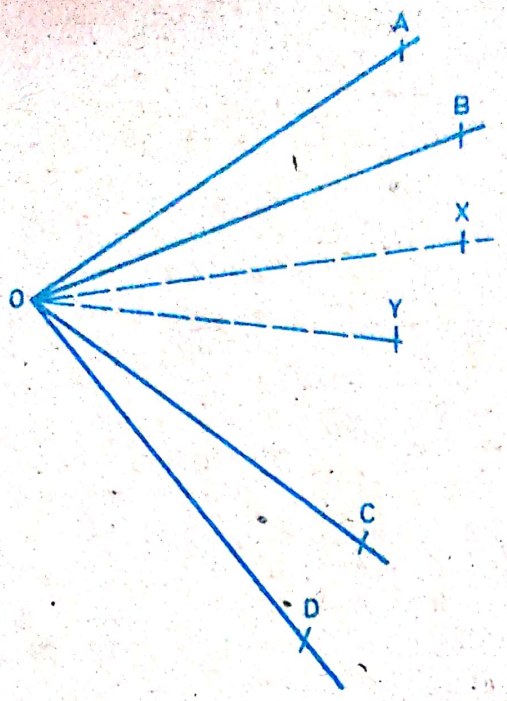


Fig. I, 4

Distingem cazurile:

I. $|OX \subseteq |aA$; II. $|OX \subseteq |aC$;

I.a $|OY \subseteq |bB$; II.a $|OY \subseteq |bB$;

I.b $|OY \subseteq |bD$; II.b $|OY \subseteq |bD$.

Să analizăm de exemplu situația II.a.

$$|OX \subseteq |aC, \quad |OY \subseteq |bB.$$

Folosind axioma U.3 de mai multe ori vom avea:

$$m(\widehat{XOY}) = m(\widehat{COB}) - m(\widehat{XOB}) - m(\widehat{YOC}) =$$
$$= m(\widehat{COB}) - (m(\widehat{XOA}) - m(\widehat{AOB})) -$$
$$- (m(\widehat{YOD}) - m(\widehat{DOC})) = m(\widehat{COB}) +$$
$$+ 2x - m(\widehat{XOA}) - m(\widehat{YOD}) = m(\widehat{COB}) +$$
$$+ 2x - m(\widehat{XOC}) - m(\widehat{YOB}) = m(\widehat{COB}) +$$
$$+ 2x - m(\widehat{XOY}) - m(\widehat{COB}) = 2x - m(\widehat{XOY}).$$

Adică obținem ecuația de gradul I:

$$m(\widehat{XOY}) = 2x - m(\widehat{XOY}) \Rightarrow m(\widehat{XOY}) = x.$$

42. Fie $P_1P_2, \ldots P_n \in K$ vîrfurile poligonului convex P. Cum K este convexă rezultă $[P_1P_2] \subset K$, $[P_2P_3] \subset K, \ldots [P_nP_1] \subset K$ deci $P \subset K$. Să arătăm că Int $P \subset K$.

Fie $A \in$ Int P. Considerăm un punct $B \in |P_1P_n|$ și să notăm cu d dreapta AB. Cum $[P_1P_n] \cap d = \{B\}$ rezultă că d separă punctele P_1, P_n. Atunci linia poligonală $P_1P_2 \ldots P_n$ (adică poligonul P mai puțin latura $[P_nP_1]$) va fi intersectată de dreapta d. (v. prob. 19 p. 21 manual) într-un punct C.

Cum $B, C \in P$ și cum $P \subset K$, avem $B, C \in K$ și deci $[BC] \subset K$. Problema se reduce la a arăta că $A \in |BC|$ (fig. I, 5). Fie $1 \leqslant i \leqslant n-1$ astfel încît $C \in [P_iP_{i+1}]$ și să notăm cu γ, β respectiv dreptele suport ale laturilor $[P_iP_{i+1}]$, $[P_1P_n]$. Cum $A \in$ Int P rezultă că A aparține semiplanului limitat de γ care conține punctele P_1, P_n; acest semiplan fiind mulțime convexă include segmentul $[P_1P_n]$ și deci conține punctul B.

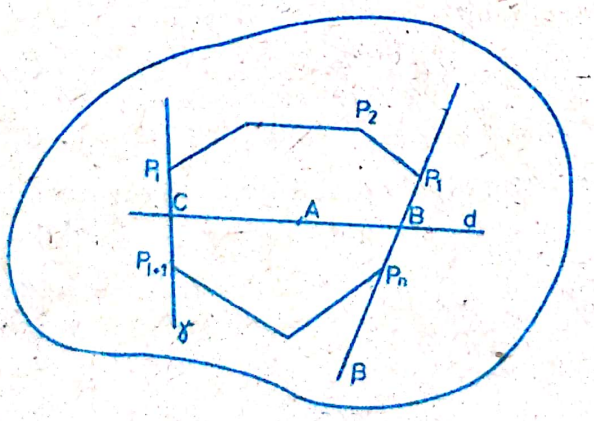


Fig. I, 5

Așadar $A \in |\gamma B$ și cum $A \in d$ rezultă $A \in |\gamma B \cap d = |CB$. Analog $A \in |BC$ și deci $A \in |CB \cap |BC = |BC|$, ceea ce încheie demonstrația.

(M. Țena, G.M. 6|1982)

43. Să arătăm că $P \subset P'$. Presupunem prin absurd că $(\exists)$ $A \in P$ și $A \notin P'$; din ipoteză va rezulta $A \in$ Int P'.

Fie $P_1', P_2', \ldots P_n'$ vîrfurile poligonului P'. Ca în problema **42** luînd un punct $B \in |P_1'P_n'|$, vom mai găsi un alt punct $C \in P'$ astfel încît $A \in |BC|$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece P_1' și P_n' se găsesc în semiplane deschise opuse limitate de dreapta BC, rezultă că mulțimea $P' \cup \text{Int } P'$ nu este inclusă în nici unul din semiplanele închise limitate de această dreaptă (fig. I,6).

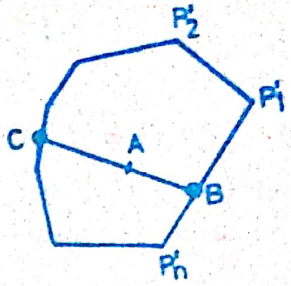


Fig. I,6

Cum $P' \cup \text{Int } P' = P \cup \text{Int } P$, rezultă că $P \cup \text{Int } P$ nu este inclusă în nici unul din semiplanele închise limitate de dreapta BC. Pe de altă parte, observăm că în mod necesar avem $B, C \in P$ (căci dacă cel puțin unul din punctele B, C ar aparține lui Int P, cum Int P este convexă am avea $|BC| \subset \text{Int } P$, deci $A \in \text{Int } P$, fals). Rezultă că dreapta BC intersectează poligonul P în trei puncte distincte A, B, C ceea ce înseamnă că este dreaptă suport a unei laturi pentru acest poligon (v. manual).

Dar P fiind convex, rezultă atunci că mulțimea $P \cup \text{Int } P$ este inclusă într-unul din semiplanele închise limitate de dreapta BC, contradicție. Analog arătăm $P' \subset P$.

(M. Țena, G.M. 12/1982)

44. Din definiția relației de congruență pe mulțimea $\mathcal{U}$ a unghiurilor rezultă că: $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA}) = m(\widehat{AOB})$, unde:

$$m: \mathcal{U} \to [0,180]$$

este funcția măsură a unghiurilor, descrisă de axiomele U.1. — U.3. Să notăm: $x = m(\widehat{AOB}) \in [0,180]$. Fie $|OB'$ semidreapta opusă lui $|OB$. Să notăm: $m(\widehat{AOB'}) = y$. Conform axiomei U.1 rezultă că: $m(\widehat{BOB'}) = 180$. Conform axiomei U.3., rezultă că $m(\widehat{BOB'}) = x + y$. Obținem atunci formula:

(1) $$x + y = 180.$$

Utilizînd în mod similar axiomele U.1. și U.3. avem:

$m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COB'}) = m(\widehat{BOB'}) = 180$, $\quad m(\widehat{COB'}) = m(\widehat{COA}) - m(\widehat{AOB'})$.

Comparînd aceste două relații și utilizînd notațiile anterioare:

(2) $$2x - y = 180.$$

Rezolvînd sistemul format din (1), (2) obținem $x = 120$, $y = 60$.

45. Fie $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ două unghiuri adiacente oarecare. Fie $|OX$ și $|OY$ bisectoarele lor. Atunci să notăm: $m(\widehat{AOB}) = x$, $m(\widehat{BOC}) = y$. Avem $m(\widehat{AOX}) = m(\widehat{XOB}) = \frac{x}{2}$, $\quad m(\widehat{BOY}) = m(\widehat{YOC}) = \frac{y}{2}$. Conform U.3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{XOY}) = m(\widehat{XOB}) + m(\widehat{BOY}) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \Rightarrow m(\widehat{XOY}) = \frac{x+y}{2}$.

46. 1) Vom avea: $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$. Dacă unghiurile sînt distincte rezultă $|OC \subset \text{Int } \widehat{AOB}$, $|OB \subset \text{Int } \widehat{COD}$ și atunci U.3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{COB}) = m(\widehat{COD}) - m(\widehat{COB}) = m(\widehat{BOD}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$. 2) Fie $|OE$ bisectoarea lui $\widehat{AOD}$ și $|OE'$ bisectoarea lui $\widehat{BOC}$.

Scanned with OKEN Scanner

$m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{EOA}) \Rightarrow m(\widehat{DOB}) + m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{EOC}) + m(\widehat{COA}) \Rightarrow m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{EOC}) \Rightarrow |OE$ este bisectoarea lui $\widehat{BOC}$. Din teorema de existență și unicitate a bisectoarei unui unghi rezultă $|OE = |OE'$.

47. Fie $X = [AB] \in \text{Seg}\,(\mathcal{P})$. $\|X\| = \delta(A, B) \geqslant 0$, conform teoremei ce dă proprietățile funcției distanță. Fie $X \in \text{Seg}\,(\mathcal{P})$ impropriu, adică $X = [AA]$. Fie d o dreaptă ce trece prin A și $f : d \to \mathbf{R}$ un sistem de coordonate pe d ales conform axiomei R. Vom avea: $\|X\| = \delta(A, A) = |f(A) - f(A)| = 0$. Fie $X = [AB] \in \text{Seg}\,(\mathcal{P})$ cu $\|X\| = 0$. Conform aceleiași teoreme de la § 3, din $\delta(A, B) = 0$ rezultă că $A = B$, deci X este impropriu.

48. Fie semidreapta $|OC$ și S, S' semiplanele deschise limitate de dreapta OC. Fie $A, B \in S$ astfel încît $m(\widehat{BOC}) < m(\widehat{AOC})$. Din teorema 7 pag. 28 manual rezultă $|OB \subset \text{Int}\,\widehat{AOC}$. Fie acum în semiplanul S' acea unică semidreaptă $|OD$ astfel încît $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOB})$. Rămîne să arătăm că $\text{Int}\,\widehat{AOB}$, $\text{Int}\,\widehat{BOC}$, $\text{Int}\,\widehat{COD}$ sînt două cîte două disjuncte. Punctele A și C sînt separate de OB (teorema transversalei) deci $\text{Int}\,\widehat{AOB}$ și $\text{Int}\,\widehat{BOC}$ sînt incluse în semiplane opuse față de OB deci $\text{Int}\,\widehat{AOB} \cap \text{Int}\,\widehat{BOC} = \varnothing$. Din construcție B, D sînt separate de OC deci la fel $\text{Int}\,\widehat{BOC} \cap \text{Int}\,\widehat{COD} = \varnothing$. Tot din construcție A, D sînt separate de OC deci $\text{Int}\,\widehat{AOC} \cap \text{Int}\,\widehat{COD} = \varnothing$. Dar (ex. 7 pag. 19 manual) $\text{Int}\,\widehat{AOB} \subset \text{Int}\,\widehat{AOC}$, deci cu atît mai mult $\text{Int}\,\widehat{AOB} \cap \text{Int}\,\widehat{COD} = \varnothing$.

49. Presupunem că B este între A și C și că C este între B și D (celălalt caz se tratează la fel). Fie M mijlocul segmentului AD. Vom arăta mai întîi că M este între B și C. Într-adevăr, dacă M nu s-ar afla între B și C, atunci M ar fi între A și B sau C și D. Dacă M este între A și B atunci $\|AM\| + \|MB\| = \|AB\|$ deci $\|AM\| < \|AB\| = \|CD\|$. Pe de altă parte avem $\|AM\| = \|MD\| = \|MB\| + \|BC\| + \|CD\| > \|CD\|$. Contradicție. Rezultă că M este între B și C. Ținînd seama de relațiile $\|AB\| + \|BM\| = \|AM\|$, $\|MC\| + \|CD\| = \|MD\|$ și de relația $\|AM\| = \|MD\|$, rezultă că $\|BM\| = \|MC\|$, adică M este mijlocul segmentului $|BC|$.

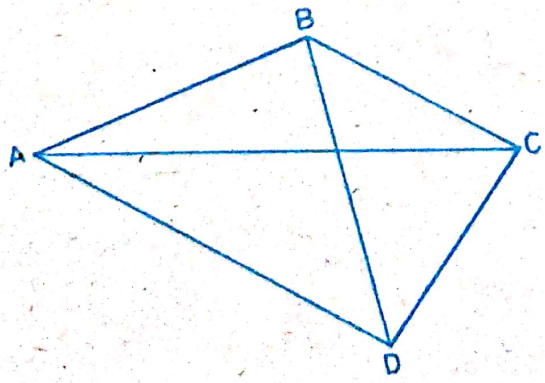


Fig. 1, 7

53. $ABCD$ fiind patrulater convex avem $m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{ACD})$ și $m(\widehat{ADC}) > m(\widehat{BDC})$. Deoarece $\|AC\| = \|AD\|$ rezultă că triunghiul ACD este isoscel, deci $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD})$. Rezultă că $m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{BDC})$ (fig. I, 7).

În triunghiul BCD latura $|BC|$ este opusă unghiului mai mic, deci $\|BC\| < \|BD\|$.

Scanned with OKEN Scanner

54. Fie $\{K\} = AB \cap CD$. Avem $m(\widehat{BDK}) > m(\widehat{BCD})$ și $m(\widehat{KDA}) > m(\widehat{DCA})$ ca unghiuri exterioare triunghiurilor BCD și ADC respectiv. Dar $K \in |AB| \subset \text{Int } \widehat{ADB}$, deci $|DK \subset \text{Int } \widehat{ADB}$. Rezultă că $m(\widehat{BDA}) > m(\widehat{BCA})$ conform axiomei U_3.

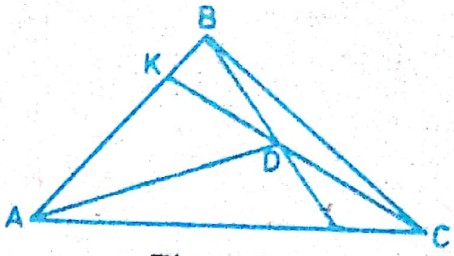


Fig. I, 8

Dar $\widehat{BDA} \equiv \widehat{ABD}$ deoarece triunghiul ABD este isoscel și prin urmare $m(\widehat{ABD}) > m(\widehat{BCA})$. Cu atît mai mult avem $m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BCA})$. În triunghiul ABC latura $|AB|$ fiind opusă unghiului mai mic este mai mică decît $|AC|$ (fig. I, 8).

55. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagon convex. Construind diagonalele pentagonului se formează cinci patrulatere convexe: $A_1A_2A_3A_4$, $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_3A_4A_5$. Se știe că suma lungimilor diagonalelor unui patrulater convex este mai mare decît suma lungimilor a două laturi opuse și deci avem inegalitățile:

$$\|A_1A_3\| + \|A_2A_4\| > \|A_1A_2\| + \|A_3A_4\|;$$
$$\|A_1A_4\| + \|A_2A_5\| > \|A_1A_2\| + \|A_4A_5\|;$$
$$\|A_2A_4\| + \|A_3A_5\| > \|A_2A_3\| + \|A_4A_5\|;$$
$$\|A_1A_3\| + \|A_2A_5\| > \|A_2A_3\| + \|A_5A_1\|;$$
$$\|A_3A_5\| + \|A_4A_1\| > \|A_3A_4\| + \|A_5A_1\|.$$

Adunînd membru cu membru aceste cinci inegalități și împărțind cu doi avem

$$\|A_1A_3\| + \|A_2A_4\| + \|A_3A_5\| + \|A_4A_1\| + \|A_5A_2\| > \|A_1A_2\| + \|A_2A_3\| + \|A_3A_4\| + \|A_5A_5\| + \|A_5A_1\|.$$

c.c.t.d.

56. Condiția $|AB| > |BC|$ implică $m(\hat{C}) > m(\hat{A})$ (1). Avem $m(\widehat{BDA}) > m(\hat{C})$ (2) ca unghi exterior triunghiului BCD. Din inegalitățile (1) și (2) rezultă că în triunghiul ABD avem $m(\widehat{BDA}) > m(\hat{A})$ de unde rezultă $|AB| > |BD|$.

57. Fie $|AC|$ latura comună triunghiurilor ABC și ADC și fie $\{E\} = |AD| \cap |BC|$ (fig. I,9).

În triunghiul ABE avem $\|AE\| + \|BE\| > \|AB\|$ (1).

În triunghiul CDE avem $\|EC\| + \|ED\| > \|CD\|$ (2).

Adunînd (1) și (2) membru cu membru avem

$$\|AE\| + \|BE\| + \|EC\| + \|ED\| > \|AB\| + \|CD\|.$$

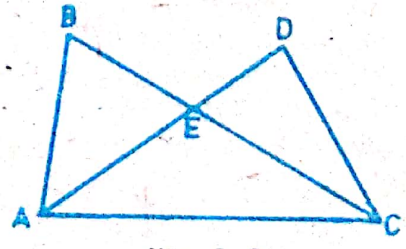


Fig. I, 9

Dar $\|AE\| + \|ED\| = \|AD\|$ și $\|BE\| + \|EC\| = \|BC\|$.

Prin urmare $\|AD\| + \|BC\| > \|AB\| + \|CD\|$.

58. Fie ABC un triunghi oarecare, $M \in |BC|$ și presupunem că $m(\hat{A}) > m(\hat{C})$. Notînd cu N piciorul perpendicularei din A pe BC și cu L piciorul perpendicularei din C pe AB avem $\|AN\| < \|CL\|$. Rămîne să comparăm suma $\|MF\| + \|ME\|$ cu $\|AN\|$, unde E și F sînt picioarele perpendicularelor din M pe AB și respectiv pe BC. Notînd cu K piciorul perpendicularei din M pe AN, observăm că este suficient să comparăm lungimile segmentelor $|AK|$ și $|ME|$, deoarece $|KN| = |MF|$. Considerînd triunghiurile dreptunghice AKM și AEM avem $\|AK\| < \|ME\|$ deoarece au aceeași ipotenuză și $m(\widehat{EAM}) > m(\widehat{KMA}) = m(\widehat{BCA})$ (fig. I,10). Astfel $\|AK\| + \|KN\| < \|MF\| + \|ME\|$ adică $\|AN\| < \|MF\| + \|ME\|$ ceea ce înseamnă că A este punctul căutat. Dacă unghiurile A și C sînt congruente atunci $\|ME\| + \|MF\| = \|AN\|$ este constantă.

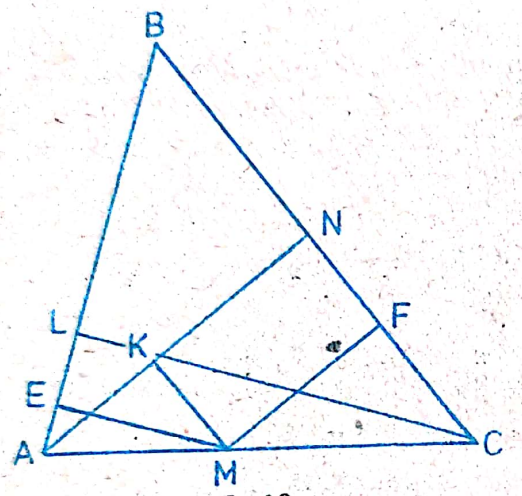


Fig. I, 10

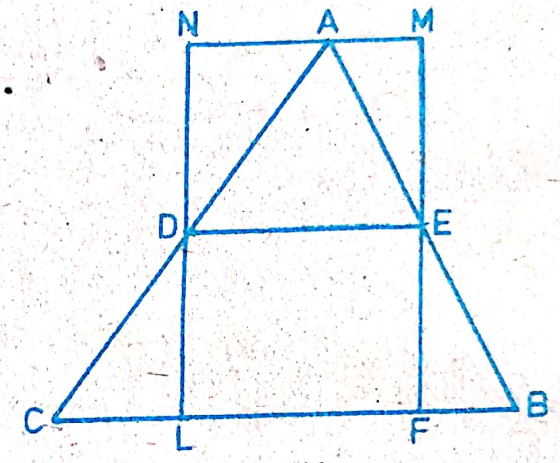


Fig. I, 11

59. Din egalitatea din enunț avem $x = -\dfrac{by + cz}{a}$. Deci

$$ayz + bxy + cxy = \frac{1}{a}[a^2yz - (bz + cy)(by + cz)] =$$

$$= -\frac{1}{a}[bcy^2 + bcz^2 + (b^2 + c^2 - a^2)yz] =$$

$$= -\frac{1}{4abc}\{[2bcy + (b^2 + c^2 - a^2)z]^2 + [4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]z^2\}.$$

Dar, deoarece

$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a - b + c) > 0$

rezultă că $ayz + bzx + cxy < 0$.

60. Fie ABC un triunghi, D și E mijloacele laturilor $|AC|$ și $|AB|$ respectiv. Notăm cu L și F picioarele perpendicularelor din D și respectiv E pe BC (fig. I, 11). Aceste perpendiculare intersectează paralela prin A la BC în N și M, respectiv. Observăm că $\triangle CDL \equiv \triangle ADN$ și $\triangle BEF \equiv \triangle AME$. Împărțirea se poate face în trei moduri.

61. Presupunem că $\triangle ABC \not\equiv \triangle A'B'C'$; atunci $m(\widehat{AMC}) \neq m(\widehat{A'M'C'})$. Fie $m(\widehat{AMC}) > m(\widehat{A'M'C'})$. Atunci $m(\widehat{CMB}) < m(\widehat{C'M'B'})$. Din triunghiu-

rile AMC și $A'M'C'$ care au cîte 2 laturi congruente și unghiurile dintre ele inegale deducem ușor că $\|AC\| > \|A'C'\|$ și la fel din triunghiurile BMC și $B'M'C'$ deducem $\|BC\| < \|B'C'\|$. În final avem $\|AC\| - \|BC\| > \|A'C'\| - \|B'C'\|$. Contradicție.

62. Să presupunem prin absurd că $\|CA\| < \|CB\|$. Notînd cu E, F piciorul înălțimii, respectiv mediana din C, vom avea $D \in |EF|$ deci $\|AD\| < \|DB\|$. Rezultă $\|AC\| + \|AD\| < \|BC\| + \|BD\|$, contradicție.

63. Alegem punctele $B_1 \in |OX$ și $C_1 \in |OY$. Fie A_1 simetricul punctului A în raport cu OX și A_2 simetricul punctului A în raport cu OY. Considerăm linia poligonală $A_1B_1C_1A_2$ a cărei lungime l este egală cu perimetrul triunghiului AB_1C_1. Deci $l = \|A_1B_1\| + \|B_1C_1\| + \|C_1A_2\|$. Dar $\|A_1B_1\| = \|AB_1\|$ și $\|C_1A_2\| = \|AC_1\|$ și avem $l = \|AB_1\| + \|B_1C_1\| + \|AC_1\|$. Linia poligonală $A_1B_1C_1A_2$ are lungimea minimă cînd punctele A_1, B_1, C_1 și A_2 sînt coliniare. În acest caz $l = \|A_1A_2\|$. Rezultă că $B = A_1A_2 \cap OX$, $C = A_1A_2 \cap OY$ (fig. I, 12). Rămîne să arătăm că $B \in |OX$ și $C \in |OY$. Dacă am presupune că B este pe semidreapta opusă semidreptei $|OX$, atunci cf. ex. 13 p. 20 manual, segmentul $|AB|$ ar intersecta latura $|OY$ într-un punct E. Dar atunci triunghiul BOE are un unghi drept $\widehat{OBE}$ și un unghi optuz $\widehat{BOE}$ (suplimentul lui $\widehat{XOY}$), contradicție. Deci $B \in |OX$ și analog $C \in |OY$.

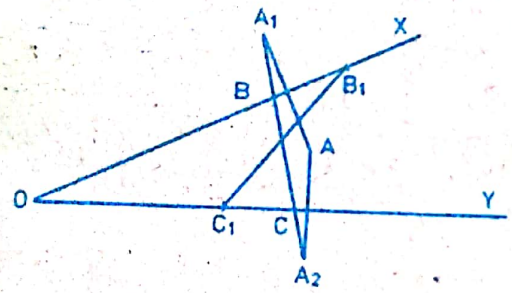


Fig. I, 12

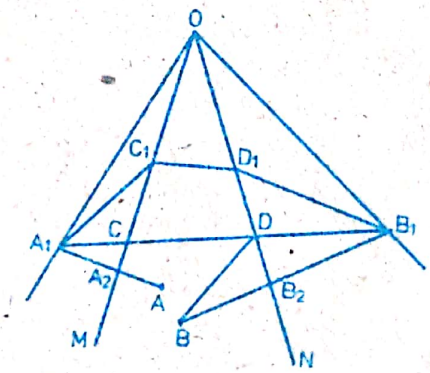


Fig. I, 13

64. Fie A_1 simetricul punctului A față de OM și B_1 simetricul punctului B față de ON (fig. I, 13). Notăm $\{A_2\} = |AA_1| \cap OM$, $\{B_2\} = |BB_1| \cap ON$. Ca și în problema precedentă avem $A_2 \in |OM$, $B_2 \in |ON$. Avem $m(\widehat{A_1OA_2}) = m(\widehat{A_2OA}) < m(\widehat{MON}) = 60$ și analog $m(\widehat{B_1OB_2}) < 60$. Deci $m(\widehat{A_1OA_2}) + m(\widehat{MON}) + m(\widehat{B_2OB_1}) < 180$ iar punctele M, N, B_1 sînt de aceeași parte a dreptei OA_1 astfel că, rezultă conform unei proprietăți din manual $|OM \subset \text{Int } \widehat{A_1ON}$, $|ON \subset \text{Int } \widehat{MOB_1}$ și atunci $|OM$, $|ON \subset \text{Int } \widehat{A_1OB_1}$. Din teorema transversalei rezultă că $|OM \cap |A_1B_1| = \{C\}$ și $|ON \cap |A_1B_1| = \{D\}$. Dreapta A_1B_1 intersectează așadar OM și ON în punctele C și respectiv D. Demonstrăm că C și D sînt punctele căutate. Într-adevăr $\|AC\| = \|A_1C\|$ și $\|BD\| = \|B_1D\|$ și deci $\|A_1B_1\| = \|AC\| + \|CD\| + \|DB\|$ și deoarece $\|A_1B_1\|$ este mai mică decît lungimea oricărei linii poligonale cu extremitățile A_1 și B_1 rezultă că $ACDB$ este linia poligonală de lungime minimă.

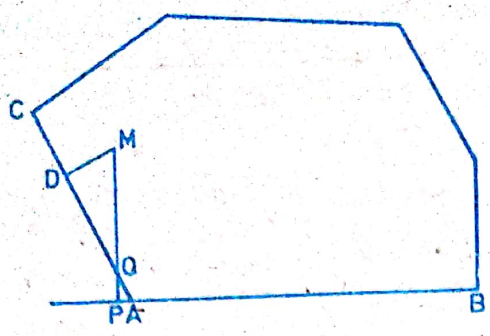


Fig. I, 14

65. Fie M un punct interior unui poligon convex iar $|AB|$ latura poligonului cea mai apropiată de M (fig. I,14). Notăm cu P piciorul perpendicularei din M pe AB. Vom demonstra că $P \in [AB]$. Într-adevăr dacă $P \notin [AB]$ atunci conform prob. 23 p. 21 manual, MP intersectează o anumită latură $|XY|$ în punctul Q; atunci $Q \in |MP|$ și deci avem $\| MQ \| < \| MP \|$. Dar distanța $\| DM \|$ de la M la XY este mai mică decît $\| MQ \|$ și deci $\| DM \| < \| MP \|$ ceea ce contrazice alegerea laturii $|AB|$. În această rezolvare prin expresia "$|AB|$ este latura cea mai apropiată de M" am înțeles „dreapta AB este cea mai apropiată de M".

66. 1) Fie $|BO$ și $|CO$ bisectoare interioare triunghiului ABC. Se arată ușor că triunghiurile BOM și CON sînt isoscele. Prin urmare $\| MN \| = \| BM \| + \| CN \|$ (fig. I, 15).

2) Relația $\| MN \| = \| BM \| + \| CN \|$ este adevărată și în cazul bisectoarelor exterioare.

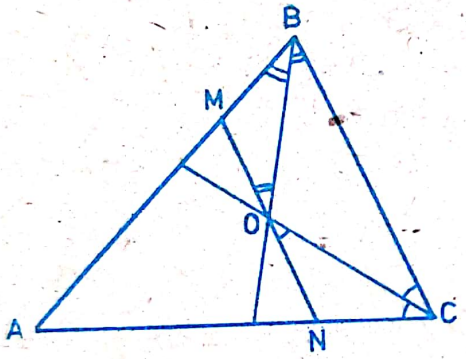


Fig. I, 15

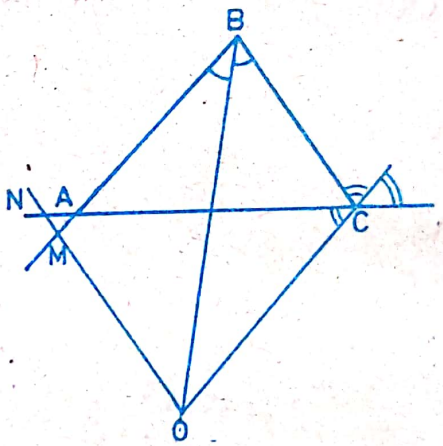


Fig. I, 16

3) Dacă una din bisectoare este interioară iar cealaltă exterioară atunci din triunghiurile BMO și CNO avem $\| MN \| = \| CN \| - \| BM \|$ dacă $\| CN \| > \| BM \|$ și $\| MN \| = \| BM \| - \| CN \|$ dacă $\| CN \| < \| BM \|$. În acest caz avem deci $\| MN \| = |\, \| CN \| - \| BM \|\,|$ (fig. I, 16).

Punctele M și N coincid numai în cazul 3) și anume cînd triunghiul ABC este isoscel ($|AB| \equiv |AC|$).

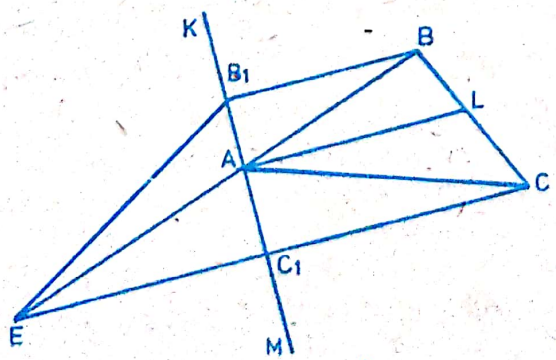


Fig. I, 17

67. Fie KM dreapta perpendiculară pe AL. Fie B_1, C_1 respectiv picioarele perpendicularelor din B și C pe KM respectiv. Fie $E \in CC_1$, $E \notin |C_1C$ astfel încît $\| CC_1 \| = \| EC_1 \|$. Demonstrăm mai întîi că punctele B, A, E sînt coliniare. Cum $L \in |BC|$ rezultă ușor $A \in |B_1C_1|$ și avem $m(\widehat{BAB_1}) = m(\widehat{CAC_1})$ (1) (fig. I, 17). Punctele A și B_1 sînt pe mediatoarea

segmentului $|CE|$ de aceea $|AC| \equiv |AE|$ și $|B_1C| \equiv |B_1E|$ (2). Rezultă că triunghiul CAE este isoscel și înălțimea sa $|AC_1|$ este bisectoare a unghiului $\widehat{CAE}$ deci $\widehat{EAC_1} \equiv \widehat{CAC_1}$ (3). Din relațiile (1) și (3) rezultă că $\widehat{BAB_1} \equiv \widehat{EAC_1}$ și cum punctele B_1, A_1, M sînt coliniare rezultă că și punctele B, A, E sînt coliniare.

În triunghiul BB_1E avem $\|AB\| + \|AE\| < \|BB_1\| + \|B_1E\|$ sau ținînd seama de (2) avem $\|AB\| + \|AC\| < \|BB_1\| + \|B_1C\|$.

Adunînd în ambii membri $\|BC\|$ obținem că perimetrul triunghiului BB_1C sete mai mare decît perimetrul triunghiului ABC.

68. Deoarece $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$ rezultă că în triunghiul AIB avem $m(\widehat{BAI}) < m(\widehat{ABI})$ și deci $|AI| > |BI|$. (1) Analog în triunghiul BIC avem $|BI| > |CI|$ (2). Din (1) și (2) avem $|AI| > |BI| > |CI|$.

69. Fie $|CM$ bisectoarea unghiului exterior $\widehat{BCB_1}$ al triunghiului ABC unde $B_1 \in AC$ este simetricul lui B față de dreapta $CM (C \in |AB_1|)$ iar $\{M_1\} = |BB_1| \cap |CM$ (teorema transversalei). Triunghiurile M_1BC și M_1B_1C sînt congruente (axioma L.U.L) de unde rezultă că $\|BC\| = \|B_1C\|$ (fig. I,18). Avem deci (1) $\|AB_1\| = \|AC\| + \|BC\|$. Deoarece $CM \perp BB_1$ și CM trece prin mijlocul M_1 al segmentului $|BB_1|$ rezultă că (2) $\|MB\| = \|MB_1\|$. Din triunghiul AMB_1 rezultă că (3) $\|MA\| + \|MB_1\| > \|AB_1\|$. Ținînd seama de (1), (2) și (3) avem

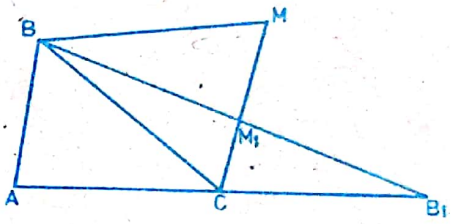


Fig. 1, 18

$$\|MA\| + \|MB\| > \|AC\| + \|BC\|.$$

Aceeași demonstrație în cazul cînd M se află pe semidreapta care este bisectoarea unghiului $\widehat{ACC_1}$, unde $C_1 \in BC$, $C \in |BC_1|$.

70. Fie $|AD|$, $|BE|$, $|CF|$ medianele triunghiului ABC și O punctul lor de intersecție. Notăm $c = \|AB\|$. Din triunghiul dreptunghic AOB avem $\|OF\| = \frac{c}{2}$ (adică F este mijlocul segmentului $|CK|$). Rezultă că $\|CF\| = \frac{3c}{2}$. Considerăm paralelogramul $AKBC$. Se știe că într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor tuturor laturilor. Avem deci $(3c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$ unde $\|KC\| = 3c$, $\|BC\| = a$, $\|AC\| = b$. Mai putem scrie $5c^2 = a^2 + b^2$. Deoarece avem $|a - b| < c < a + b$ rezultă că $5(a + b)^2 > a^2 + b^2$ și $5(a - b)^2 < a^2 + b^2$. Ultima din aceste două inegalități este echivalentă cu $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 < 0$ de unde rezultă $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

71. Vom demonstra că orice 7 segmente din planul $\mathcal{P}$ nu pot fi așezate în $\mathcal{P}$ astfel încît fiecare să intersecteze exact alte trei segmente. Să presupunem prin absurd că există 7 segmente care satisfac condițiile problemei. În acest caz alcătuim un tabel cu 7 linii și 7 coloane: la intersecția liniei i cu coloana j punem semnul + dacă segmentul i se intersectează cu segmentul j și semnul — dacă nu se intersectează. Dacă $i = j$ punem —. Pe fiecare coloană trebuie

Scanned with OKEN Scanner

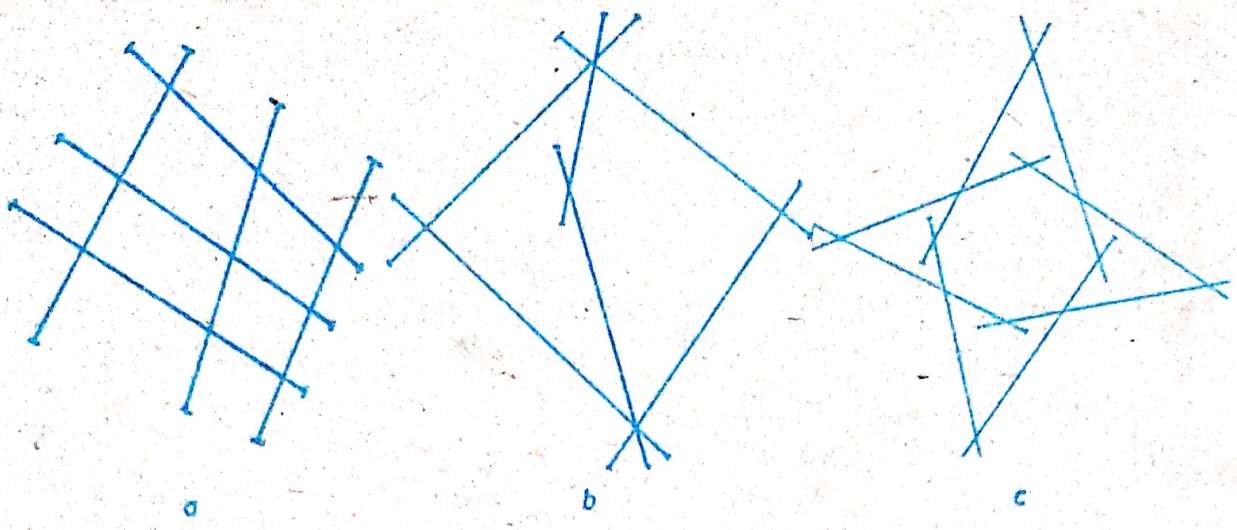


Fig. I, 19

să avem trei semne $+$, deci în total avem $3 \cdot 7 = 21$ de semne $+$. Pe de altă parte numărul semnelor $+$ situate deasupra diagonalei principale a tabelului este egal cu numărul semnelor $+$ situate sub diagonala principală căci dacă segmentul i se intersectează cu segmentul j atunci și segmentul j se intersectează cu segmentul i. Numărul total al semnelor $+$ este par. Contradicție. În figurile I, 19, *a*, *b*, *c* se arată cum pot fi așezate 6 respectiv 8 segmente astfel încît fiecare să intersecteze exact alte trei.

72. Ordonăm segmentele după lungime $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7$. Se știe că segmentele $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$ sînt laturile unui triunghi dacă și numai dacă $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Presupunem că afirmația din enunțul problemei nu este adevărată. Atunci $a_k + a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$ pentru $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Dacă $a_1 = a_2 = 10$ și $a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$ pentru $k = 1, 2, 3, 4, 5$ rezultă că $a_7 = 130 > 100$. Contradicție. Cu atît mai mult cînd $a_2 > a_1 > 10$ și $a_k + a_{k+1} < a_{k+2}$ pentru $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

73. Fie $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vîrfurile poligonului P. Notăm $a = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, $b = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, $c = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$, $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. Fie în plan punctele $M(a, c)$, $N(b, c)$, $Q(b, d)$, $R(a, d)$, (fig. I, 20). Cum a, b sînt abscise, iar c, d sînt ordonate pentru anumite vîrfuri ale poligonului P și cum $P \subset A \times B$, rezultă $a, b \in A$ și $c, d \in B$. Dar atunci (a, c), (b, c), (b, d), $(a, d) \in A \times B = P \cup \text{Int } P$, deci $M, N, Q, R \in P \cup \text{Int } P$.

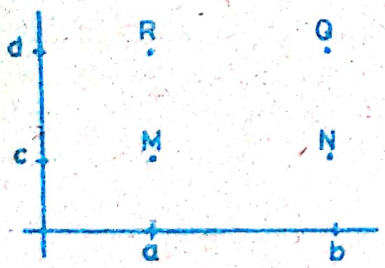


Fig. I, 20

Luînd $K = P \cup \text{Int } P$ care este o mulțime convexă, deoarece dreptunghiul $MNQR$ este un patrulater convex cu vîrfurile în K, va rezulta conform problemei **42** că acest dreptunghi reunit cu interiorul este inclus în K. Așadar:

$$[a, b] \times [c, d] \subset P \cup \text{Int } P.$$

Să mai observăm că $A \subset [a, b]$ și $B \subset [c, d]$ și atunci putem scrie:

$$P \cup \text{Int } P = A \times B \subset [a, b] \times [c, d].$$

Rezultă egalitatea $P \cup \text{Int } P = [a, b] \times [c, d]$ și conform problemei **43** va rezulta că P este tocmai dreptunghiul $MNQR$.

(M. Țena, G.M. 4/1982)

Scanned with OKEN Scanner

74. Se aplică faptul că o dreaptă ce intersectează un triunghi şi nu trece prin vîrfuri, intersectează exact 2 din laturi şi apoi teorema transversalei. Se va studia şi cazul cînd triunghiul este isoscel.

75. Se obţine reducere la absurd; dacă $B \in a$, rezultă că segmentul $[BC]$ este degenerat.

76. Punctul M este intersecţia mediatoarelor segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ dacă această intersecţie există. În geometria euclidiană această intersecţie există întotdeauna (se poate vedea demonstraţia concurenţei mediatoarelor în triunghi).

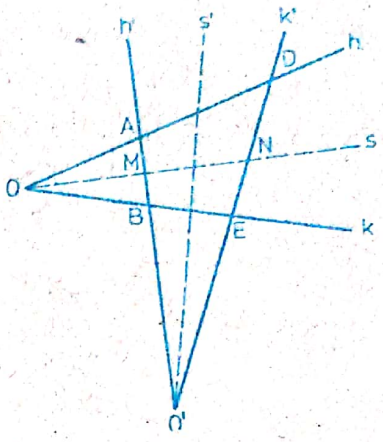


Fig. I, 21

77. Fie: $\{A\} = h \cap h'$; $\{B\} = k \cap h'$; $\{D\} = h \cap k'$; $\{E\} = k \cap k'$ (fig. I, 21). Conform teoremei transversalei $s \cap |AB| = \{M\}$, $s \cap |DE| = \{N\}$. Dar $A, B \in h'$ care este mulţime convexă, deci $[AB] \subset h'$ şi deci $M \in h'$; analog $N \in k'$. Atunci, aplicînd din nou teorema transversalei rezultă $s' \cap |MN| \neq \emptyset$ şi cum $[MN] \subset s$, rezultă $s \cap s' \neq \emptyset$.

78. Conform unei probleme anterioare (nr. **77**) bisectoarele s şi s' ale unghiurilor $\widehat{hk}$ şi $\widehat{h'k'}$ se intersectează, iar punctul de intersecţie este cel căutat.

79. Se arată că mediatoarea segmentului $[DE]$ intersectează dreptele AB, BC, AC.

80. $\triangle BA'H \equiv \triangle BA'H'(CC) \Rightarrow \| BH \| = \| BH' \|$ (1) (fig. I, 22). Pe de altă parte avem $\| BH \| = \| AH \|$, dar $\| AH \| = 2 \| HA' \| = \| HH' \|$, deci $\| BH \| = \| HH' \|$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă că BHH' este triunghi echilateral. Apoi avem:

$$\| AH' \| = 2 \| HH' \| = 2 \| BH' \|.$$

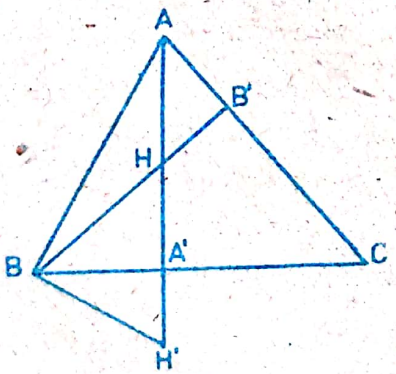


Fig. 1, 22

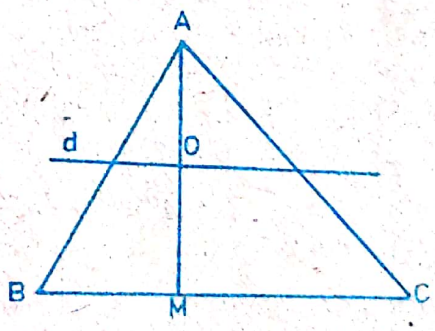


Fig. 1, 23

82. Fie O mijlocul lui $[AM]$ şi d mediatoarea lui $[AM]$ (fig. I, 23). Se ştie că dacă o dreaptă intersectează un triunghi şi nu trece prin nici unul din vîrfuri atunci intersectează exact 2 laturi ale triunghiului. Dreapta d intersectează în O triunghiul ABM, dar nu trece prin nici unul din vîrfuri ($M \notin d$, deoarece $\| BM \| \neq \| AB \|$), deci va mai intersecta o singură latură a triunghiului ABM. Dar atunci d intersectează triunghiul ABC şi nu trece prin nici unul din vîrfuri ($C \notin d$, deoarece $\| CM \| \neq \| AC \|$), ceea ce înseamnă că d va intersecta exact 2 din laturile triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

83. ($\Rightarrow$) Presupunem că triunghiul ABC este echilateral și să arătăm că $\| MN \| < \min (\| AB \|, \| BC \|, \| CA \|)$, $(\forall)\ M, N \in \text{Int}\ ABC$. Notăm $\| AB \| = \| BC \| = \| CA \| = a$.

1) M, N, A necoliniare (fig. I, 24 *a*). Conform teoremei transversalei $|AM \cap |BC| = \{M'\}, |AN \cap |BC| = \{N'\}$. Să presupunem că $M \in |BN'|$ (analog se tratează cazul $N' \in |BM'|$). Punctele A, M' fiind pe laturile unghiului $\widehat{AN'B}$ rezultă $|AM'| \subset \text{Int}\ \widehat{AN'B} \Rightarrow M \in \text{Int}\ \widehat{AN'B}$ deci $|N'M \cap \cap |AB| = \{N''\}$. Conform unei proprietăți cunoscute $\| MN \| < \max (\| MA \|, \| MN' \|)$. Dar $\| MA \| < \| M'A \| < \max (\| AB \|, \| AC \|) = a$, iar $\| MN' \| < \| N''N' \| < \max (\| BN' \|, \| AN' \|) < \max(\| BC \|, \max(\| AB \|, \| AC \|)) = a$. Rezultă: $\| MN \| < a = \min (\| AB \|, \| BC \|, \| CA \|)$.

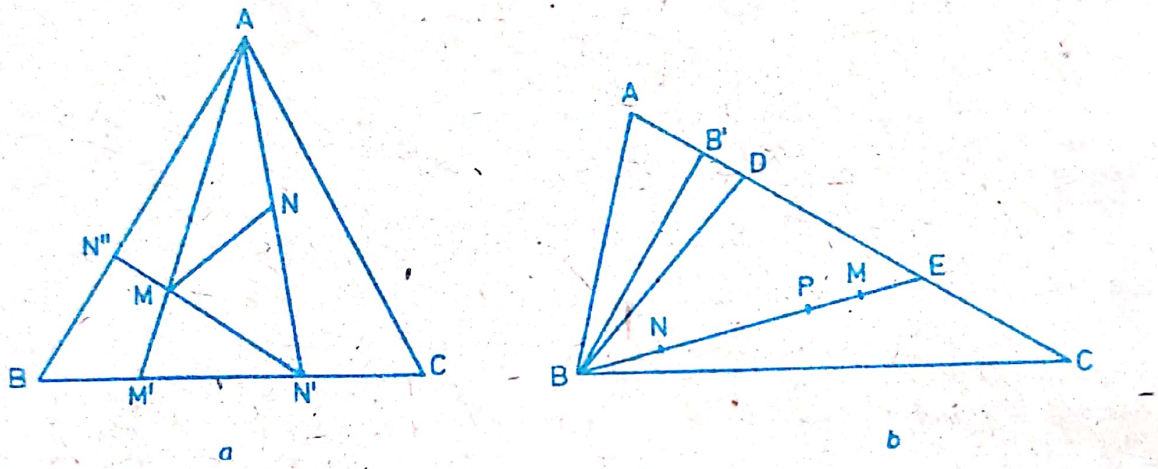


Fig. I, 24

2) M, N, A coliniare. Conform teoremei transversalei fie $|AN \cap |BC| = \{N'\}$. Atunci $\| MN \| < \| AN' \| < \max (\| AB \|, \| AC \|) = a$.

($\Leftarrow$) Presupunem că $\| MN \| < \min (\| AB \|, \| BC \|, \| CA \|)$ $(\forall)\ M, N \in \text{Int}\ ABC$ și să arătăm că triunghiul ABC este echilateral. Presupunem prin absurd că ABC nu este triunghi echilateral și fie $\| AB \| = \min (\| AB \|, \| BC \|, \| CA \|)$. Există două posibilități:

1) $\| AB \| < \| BC \| \leqslant \| AC \|$ (sau, analog $\| AB \| < \| AC \| \leqslant \| BC \|$).

2) $\| AB \| = \| BC \| < \| AC \|$ (sau, analog $\| AB \| = \| AC \| < \| BC \|$).

1) Avem $\| AB \| < \| BC \| \leqslant \| AC \|$. Rezultă $\text{m}(\hat{C}) < \text{m}(\hat{A}) < \text{m}(\hat{B})$ (fig. I, 24*b*). Cum un triunghi nu poate avea decît cel mult un unghi drept sau optuz, rezultă $\text{m}(\hat{A}) < 90$, $\text{m}(\hat{C}) < 90$. Atunci, conform unei proprietăți cunoscute, piciorul B' al perpendicularei din B pe AC, este pe $|AC|$. Fie $D \in |B'C$ astfel încît $\| B'D \| = \| B'A \|$; rezultă $\| BD \| = \| AB \|$. Avem $D \in |B'C|$, căci dacă am presupune $C \in |B'D|$ sau $D = C$, atunci $\text{m}(\hat{C}) \geqslant \text{m}(\widehat{BDB'}) = \text{m}(\hat{A})$, fals. Fie atunci un punct $E \in |DC|$. Avem $\text{m}(\hat{A}) = \text{m}(\widehat{ADB}) > \text{m}(\widehat{AEB})$ și din triunghiul $ABE \Rightarrow \| BE \| > \| AB \|$. Fie atunci $P \in |BE|$ astfel încît $\| BP \| = \| AB \|$ și fie $M \in |PE|$. Luăm $N \in |MP$ astfel ca $\| MN \| = \| BP \| = \| AB \|$; rezultă $N \in |BM|$, căci dacă am avea $B \in |NM|$ sau $N = B$, atunci $\| MN \| = \| MB \| + \| BN \| \geqslant \| MB \| > \| BP \|$, fals.

Aşadar $M, N \in |BE| \subset \text{Int } ABC$, deci $M, N \in \text{Int } ABC$, dar cu toate acestea $\|MN\| = \|AB\| = \min(\|AB\|, \|BC\|, \|CA\|)$, contradicţie.

2) Avem $\|AB\| = \|BC\| < \|AC\|$. Rezultă $m(\hat{C}) = m(\hat{A}) < m(\hat{B})$.

a) Dacă $m(\hat{B}) \geq 90$ (fig. I, 24 *c*), luînd $D \in |BC|$, din triunghiul ABD va rezulta $\|AD\| > \|AB\|$. Atunci, asemănător ca la 1° găsim $M, N \in |AD|$ cu $\|MN\| = \|AB\|$ şi ajungem la contradicţie.

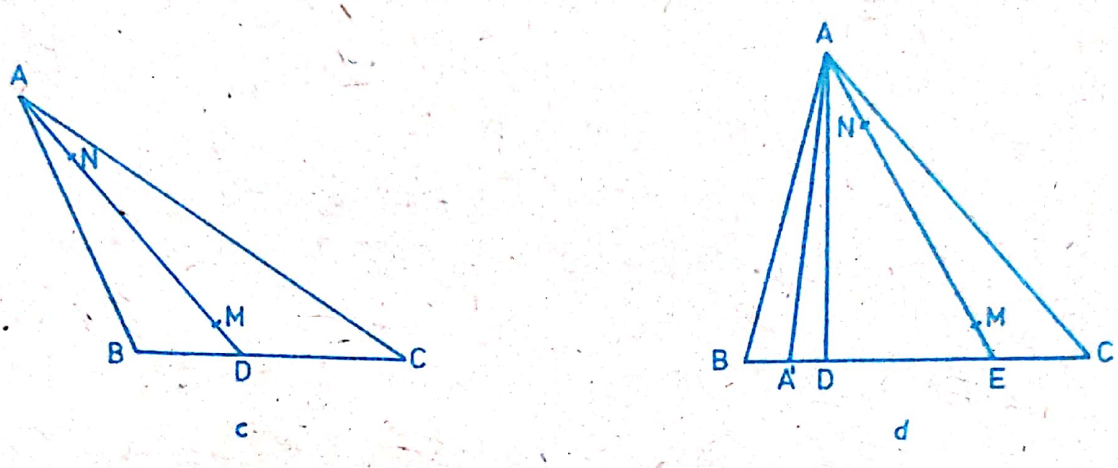


Fig. I, 24

b) Dacă $m(\hat{B}) < 90$ (fig. I, 24 *d*) cum şi $m(\hat{C}) < 90$ piciorul A' al perpendicularei din A pe BC va fi pe $|BC|$. Luăm $D \in |A'C$ astfel ca $\|A'D\| = \|A'B\|$ şi asemănător ca la 1) rezultă că $D \in |A'C|$ şi $\|AD\| = \|AB\|$. Luînd acum $E \in |DC|$, asemănător ca la 1) va rezulta $\|AE\| > \|AB\|$ şi atunci vom putea găsi $M, N \in |AE|$ astfel ca $\|MN\| = \|AB\|$, de unde obţinem iarăşi contradicţie. Aşadar triunghiul ABC este echilateral.

(Marius Burtea, G.M. 3/1981)

84. 1) Se consideră $M \in d$, se duce perpendiculara d' în punctul M pe dreapta d şi se aplică dreptei d' axioma riglei.

2) Luăm ca mai sus $M_1, M_2 \in d$, $M_1 \neq M_2$ etc.

86. Fie D piciorul perpendicularei din A pe BC. Trebuie să arătăm inegalitatea:

$$|\|AB\| - \|AC\|| \leq |\|BD\| - \|CD\||. \qquad (1)$$

Dacă $\|AB\| = \|AC\|$, (1) devine $0 = 0$. Putem deci presupune $\|AB\| \neq \|AC\|$ şi fixînd ideile, fie $\|AB\| < \|AC\|$. Distingem cazurile:

1) $D \in |BC|$ (fig. I, 25 *a*). Fie $E \in |DC$ astfel încît $\|DE\| = \|BD\|$; rezultă $\|AE\| = \|AB\|$ şi $m(\hat{B}) = m(\widehat{AED})$. Avem în mod necesar $E \in [DC]$, pentru că dacă am presupune $C \in [DE]$ sau $E = C$, atunci $m(\hat{C}) \geq m(\widehat{AED}) = m(\hat{B})$ şi de aici am deduce $\|AB\| > \|AC\|$, fals. Atunci folosind triunghiul AEC putem scrie:

$$|\|AB\| - \|AC\|| = |\|AE\| - \|AC\|| < \|EC\| =$$
$$= |\|DC\| - \|DE\|| = \|DC\| - \|BD\| = |\|BD\| - \|DC\||$$

şi (1) este stabilită.

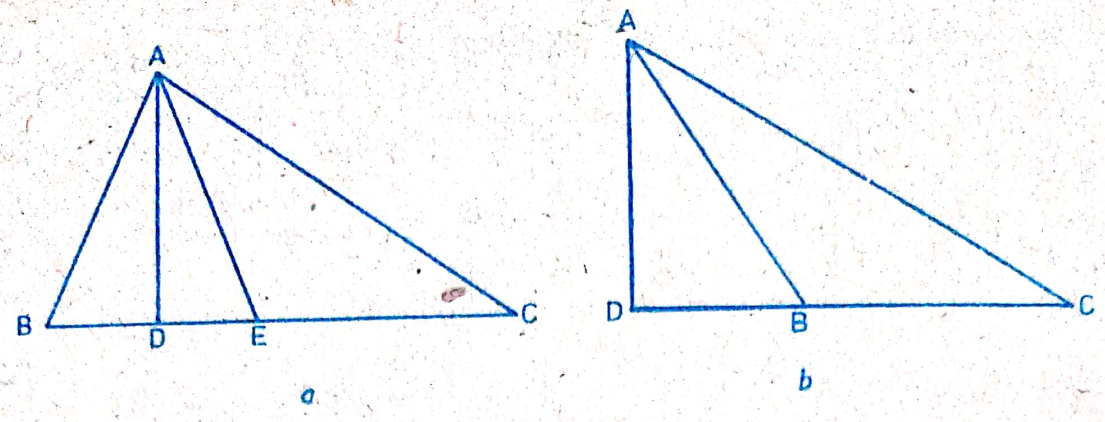


Fig. I, 25

2) $B \in |CD|$ (Fig. I, 25 b). Din triunghiul ABC avem:

$$|\,\|AB\| - \|AC\|\,| < \|BC\| = \|DC\| - \|BD\| = |\,\|BD\| - \|DC\|\,|$$

și (1) este stabilită.

3) $D = B$. Analog cu 2).

Nu mai putem avea alte cazuri, căci dacă am presupune $C \in |BD|$ sau $D = C$, atunci $m(\hat{C}) \geqslant m(\widehat{ADB}) = 90$, deci $m(\hat{C}) \geqslant m(\hat{B})$ de unde $\|AB\| \geqslant \|AC\|$, fals.

(Ilie Loziciu, R.M.T. 8/1971)

87. 1) Se ține seama că orice patru vîrfuri ale unui poligon convex sînt vîrfurile unui patrulater convex.

2) Se ține cont de inegalități în triunghiuri, discutîndu-se separat cazurile cînd punctul din plan aparține poligonului sau nu aparține acestuia.

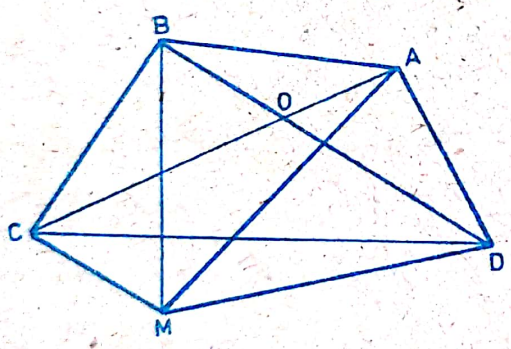


Fig. I, 26

88. Fie $ABCD$ patrulaterul convex, $\{O\} = [AC] \cap [BD]$ și $M \in \mathcal{P}$. Deosebim cazurile cînd M aparține cel puțin unei diagonale și cînd M nu aparține nici unei diagonale. Oricum, însă, putem scrie (fig. I, 26):

$$\|MA\| + \|MC\| \geqslant \|AC\|,$$

$$\|MB\| + \|MD\| \geqslant \|BD\| \text{ și deci}$$

$$\|MA\| + \|MB\| + \|MC\| + \|MD\| \geqslant$$

$$\geqslant \|AC\| + \|BD\| =$$

$$= \|OA\| + \|OB\| + \|OC\| + \|OD\|.$$

89. Conform unei inegalități geometrice vom avea:

$$|b - c| < 1. \text{ Cum } b, c \in \mathbf{N} \Rightarrow |b - c| \in \mathbf{N}.$$

Dar $|b - c| < 1 \Rightarrow |b - c| = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c \Rightarrow |AB| = |AC|$.

(George Fundănescu, G.M. 7/1980)

90. 1) $\min\limits_{M \in \mathcal{M}} f(M) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}} (x_1\|MA_1\| + \ldots + x_n\|MA_n\|) \geqslant x_1 \min\limits_{M \in \mathcal{M}} \|MA_1\| +$

$+ \ldots + x_n \min\limits_{M \in \mathcal{M}} \|MA_n\| = x_1\, d(A_1, \mathfrak{M}) + \ldots + x_n\, d(A_n, \mathfrak{M}) = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n.$

2) $f(P) = x_1\|PA_1\| + \ldots + x_n\|PA_n\| \leqslant x_1\, d(P, \mathfrak{M}) + \ldots + x_n d(P, \mathfrak{M}) =$

$= (x_1 + \ldots + x_n)\, d(P, \mathfrak{M}) = n\, d(P, \mathfrak{M}) \Rightarrow \frac{1}{n} f(P) \leqslant d(P, \mathfrak{M}).$

91. Se știe că lungimea medianei unui triunghi este mai mică decît semisuma lungimilor laturilor alăturate. Să presupunem prin absurd că există două puncte $M_0,\ N_0 \in \mathcal{P},\ M_0 \neq N_0$ cu: $f(M_0) = f(N_0) = \min\limits_{M\in\mathcal{P}} f(M)$. Fie atunci P mijlocul segmentului $[M_0N_0]$; în triunghiurile $A_iM_0N_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avem: $[A_iP]$ mediane deci:

$$(1)\quad \|A_1P\| \leqslant \frac{\|M_0A_i\| + \|N_0A_i\|}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Egalitatea are loc atunci cînd: M_0, A_i, N_0 sînt coliniare. Punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fiind necoliniare rezultă că cel puțin una din inegalitățile (1) este strictă. Atunci $f(P) = x_1\|PA_1\| + \ldots + x_n\|PA_n\| < x_1\dfrac{\|M_0A_1\| + \|N_0A_1\|}{2} + \ldots +$

$$+ x_n\frac{\|M_0A_n\| + \|N_0A_n\|}{2} = (x_1\|M_0A_1\| + \ldots + x_n\|M_0A_n\|)\frac{1}{2} +$$

$$+ (x_1\|N_0A_1\| + \ldots + x_n\|N_0A_n\|)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(M_0) + \frac{1}{2}f(N_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\min_{M\in\mathcal{P}} f(M) + \frac{1}{2}\min_{M\in\mathcal{P}} f(M) = \min_{M\in\mathcal{P}} f(M).$$

De unde rezultă că:

$$f(P) < \min_{M\in\mathcal{P}} f(M)$$

contradicție.

(V. Cîrtoaje, G.M.B. 12/1973)

Capitolul II

PARALELISM. ASEMĂNARE

1. Admitem prin absurd că $a \parallel b$. Dar $b \parallel AB$ și deci $a \parallel AB$ sau $a = AB$. Cum $A \in a$, rezultă că $a = AB$. Ca o consecință a axiomei paralelelor $m(\widehat{BAC}) = 60$. Dar din $a \perp AC$ avem $m(\widehat{BAC}) = 90$, contradicție.

2. Rezultă din congruența triunghiurilor dreptunghice AMQ, MBN, NPC, PDQ, cazul C.C.

3. $DE \parallel AF$, $AE \parallel DF$, $m(\widehat{EAF}) = 90$, deci $AEDF$ este dreptunghi.

4. Fie AM, BN, CP medianele triunghiului ABC. Fie G punctul lor de intersecție. Fie A_1 astfel încît $CA_1 \parallel AB$, $BA_1 \parallel AC$. Deoarece ABA_1C este paralelogram, A, M, A_1 sînt coliniare. În triunghiul ABA_1 avem $\|AA_1\| \leqslant \|AB\| + \|BA_1\|$. Dar $|BA_1| \equiv |AC|$, $|AM| \equiv |MA_1|$. Atunci: $2\|AM\| \leqslant \|AB\| + \|AC\|$ (1). Analog $2\|BN\| \leqslant \|BA\| + \|BC\|$ (2)

Scanned with OKEN Scanner

și $2 \| CD \| \leqslant \| CA \| + \| CB \|$ (3). Se adună (1), (2), (3) membru cu membru. În triunghiul ABG avem:

$\| AB \| \leqslant \| AG \| + \| BG \|$ de unde: $\| AB \| \leqslant \frac{2}{3} (\| AM \| + \| BN \|)$ (4)

și analog $\| AC \| \leqslant \frac{2}{3} (\| AM \| + \| CP \|)$ (5), $\| BC \| \leqslant \frac{2}{3} (\| BN \| +$

$+ \| CP \|)$ (6). Se adună (4), (5), (6) membru cu membru.

5. 1) $M \in | DC | \subseteq \text{Int } \widehat{DAC}$; deoarece B, C sînt de aceeași parte a dreptei AD și $m(\widehat{CAD}) < m(\widehat{BAD})$, urmează că $| AC \subseteq \text{Int } \widehat{BAD}$, și deci $\text{Int } \widehat{DAC} \subseteq \text{Int } \widehat{BAD}$. În concluzie $M \in \text{Int } (\widehat{BAD})$ și deci $m(\widehat{BAM}) <$ $< m(\widehat{BAD})$ deci:

$m(\widehat{BAK}) = 1/2 m(\widehat{BAM}) < 1/2 m(\widehat{BAD}) = 45 = m(\widehat{BAC})$ și cum K, C sînt de aceeași parte a dreptei AB, rezultă că: $| AK \subseteq \text{Int } \widehat{BAC}$, deci conform teoremei transversalei $K \in | BC |$.

2) Fie $N \in CD$, $D \in | CN |$, astfel încît: $| BK | \equiv | DN |$. Atunci $\| BK \| +$ $+ \| DM \| = \| DN \| + \| DM \| = \| MN \|$. Fie $m(\widehat{BAK}) = x$. Atunci $m(\widehat{MAD}) = 90 - 2x$, $m(\widehat{DAN}) = x$, $m(\widehat{MNA}) = 90 - x$, deci $m(\widehat{MAN}) =$ $= m(\widehat{MNA})$, deci $| MA | \equiv | MN |$.

6. Fie $H \in \mathcal{P}$ astfel ca: $AH \| BC$, $CH \| AB$. Deoarece $ABCH$ este paralelogram B, M, H sînt coliniare. Avem $| BD | \equiv | AB | \equiv | CH |$, $| BG | \equiv | BC |$, $\widehat{DBG} \equiv \widehat{BCH}$, ca unghiuri cu laturile perpendiculare. Deci $\triangle BDG \equiv \triangle CHB$, deci $\| DG \| = \| BH \| = 2 \| BM \|$.

7. Rezultă din $\triangle ABK \equiv \triangle ADM$, cazul L.U.L.

8. Fie $M_1 \in | AD |$, $L_1 \in | AB |$, astfel încît $MM_1 \perp AD$; $LL_1 \perp AB$. Concluzia problemei se obține din congruența triunghiurilor MM_1N și LL_1K cazul C.U.

9. Patrulaterele $ABDE$, $BCEF$ sînt paralelograme. Atunci diagonalele $[BE]$, $[AD]$ se intersectează în O, $| BO | \equiv | OE |$. Dar $[BE]$ este diagonală și în $BCEF$ și deci a doua diagonală $[CF]$ trece prin O.

10. Fie $(C, D, E, F) \in \mathfrak{M}_{AB}$. Să presupunem că: $A \in | CD |$. Pentru orice poziție a punctului B, sau $\| AB \| \leqslant \| AE \|$ sau $\| AB \| \leqslant \| AF \|$. Să presupunem $\| AB \| \leqslant \| AE \|$ pentru a face o alegere. Avem $\| AF \| +$ $+ \| AC \| + \| AD \| \geqslant 2 \| CD \| = \frac{2}{\sqrt{2}} \| CE \|$, deoarece $\| AF \| \geqslant \| CD \|$. Atunci $\| AC \| + \| AD \| + \| AE \| + \| AF \| \geqslant (1 + \sqrt{2}) \| AB \|$; egalitatea are loc dacă $| AB |$ este diagonală în $CDEF$. Fie atunci $O \in | AB |$, $| AO | \equiv | OB |$ și $d \perp AB$, $O \in d$. Fie D_0, $F_0 \in d$, $O \in | D_0F_0 |$, $| D_0O | \equiv$ $\equiv | OF_0 | \equiv | AO |$. Dacă punem $C_0 = A$, $E_0 = B$, atunci $(C_0, D_0, E_0, F_0) \in$ $\in \mathfrak{M}_{AB}$ realizează minimumul din enunț.

11. Rezultă din congruența triunghiurilor ABM și CBN, cazul L.U.L.

Scanned with OKEN Scanner

12. Fie $C_1 \in d$ și $D_1 \in d$ astfel ca $\| C_1D_1 \| = L$. Fie $B_1 \in S$, $BB_1 \| d$, $| BB_1 | \equiv | C_1D_1 |$, B_1 fiind ales de aceeași parte a lui BD_1 ca și C_1. Fie B_2 simetricul lui B_1 față de d. Atunci $\| AC_1 \| + \| C_1D_1 \| + \| D_1B \| = \| AC_1 \| + \| C_1B_2 \| + L$ care este minimă atunci cînd linia poligonală AC_1B_2 se reduce la segmentul $| AB_2 |$. Fie $D \in d$ de aceeași parte a lui AB_2 ca și B și $| CD | \equiv | C_1D_1 |$, unde $\{C\} = | AB_2 | \cap d$. Perechea (C, D) realizează minimumul căutat.

13. Triunghiurile ALD și BNC sînt congruente în cazul U.L.U. Atunci $| AL | \equiv | CN |$, $| BN | \equiv | DL |$. Analog $| AK | \equiv | CM |$, $| BK | \equiv | DM |$. Atunci $| KL | \equiv | NM |$, $| KN | \equiv | LM |$. În plus $\widehat{AKN}$ este exterior triunghiului ABK deci $\mathrm{m}(\widehat{AKN}) = \mathrm{m}(\widehat{ABK}) + \mathrm{m}(\widehat{BAK}) = 90$.

14. $| BF | \equiv | FE |$, din $\triangle ABF \equiv \triangle AEF$, conform cazului de congruență C.I. Pe de altă parte FEC este triunghi dreptunghic isoscel.

15. Notăm $\mathrm{m}(\widehat{ABD}) = x$, $\mathrm{m}(\widehat{DBC}) = x'$, $\mathrm{m}(\widehat{ABD}) = y$, $\mathrm{m}(\widehat{BDC}) = y'$. Aplicînd convenabil teorema privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi obținem sistemul $x + y + 20 = 180$, $x' + y' + 110 = 180$, $x + x' = 130$, $y + y' = 100$, cu numai trei ecuații independente.

16. $| AM |$ fiind mediană relativă la ipotenuză în triunghiul dreptunghic ADC, $| AM | \equiv | MC |$. Dar $AB \| CM$, deci $\mathrm{m}(\widehat{ACM}) = 60$, Atunci ACM este echilateral și deci $| AB | \equiv | CM |$. Deci $ABCM$ este paralelogram.

18. Fie ABC un triunghi. Deoarece latura mai mare se opune unghiului mai mare (1) $(a - b)(\mathrm{m}(\hat{A}) - \mathrm{m}(\hat{B})) \geqslant 0$,
(2) $(b - c)(\mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(\hat{C})) \geqslant 0$, (3) $(c - a)(\mathrm{m}(\hat{C}) - \mathrm{m}(\hat{A})) \geqslant 0$.
Adunînd membru cu membru aceste inegalități, după transformări elementare avem: (4) $\dfrac{a\mathrm{m}(\hat{A}) + b\mathrm{m}(\hat{B}) + c\mathrm{m}(\hat{C})}{a + b + c} \geqslant 60$. În (4) avem egalitate dacă avem egalitate în (1), (2), (3), deci dacă: $a = b$, $b = c$, $c = a$.

19. Fie $\{D\} = | BM \cap | AC |$. Unghiurile $\widehat{AMD}$, $\widehat{DMC}$ sînt respectiv unghiuri exterioare triunghiurilor AMB, CMB. Urmează că $\mathrm{m}(\widehat{AMD}) > \mathrm{m}(\widehat{ABM})$, $\mathrm{m}(\widehat{DMC}) > \mathrm{m}(\widehat{MBC})$.

20. În triunghiul AOB, $\mathrm{m}(\widehat{AOB}) = 180 - 1/2\,(\mathrm{m}(\hat{A}) + \mathrm{m}(\hat{B}))$. Folosim acum faptul că suma măsurilor unghiurilor în $ABCD$ este 360. Analog pentru b), tratîndu-se separat cazurile $E \in | CD |$, $D \in | CE |$.

21. Unul dintre unghiurile $\widehat{BLA}$, $\widehat{BLC}$ are măsura mai mare sau cel puțin egală cu 90. Fie $\mathrm{m}(\widehat{BLA}) \geqslant 90$, pentru fixarea ideilor. Atunci $\| AB \| > \| AL \|$. Pe de altă parte $\mathrm{m}(\widehat{BLC}) > \mathrm{m}(\widehat{LBC})$, $\widehat{BLC}$ fiind unghi exterior triunghiului ABL și $\widehat{ABL} \equiv \widehat{LBC}$. Rezultă $\| BC \| > \| LC \|$.

Scanned with OKEN Scanner

22. Datorită teoremei unghiului exterior rezultă $D \in |BC$. Deoarece $m(\widehat{BAD}) = 90 < m(\widehat{BAC}) = 135$ și D, C sînt de aceeași parte a dreptei AB, rezultă $|AD \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ și atunci conform teoremei transversalei $D \in |BC|$.

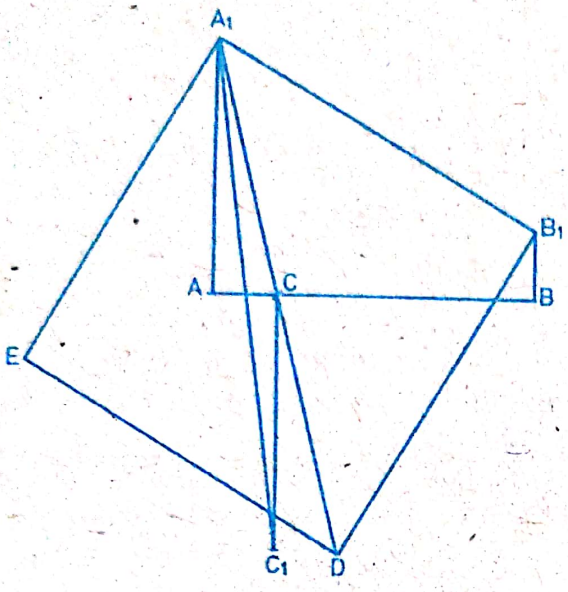


Fig. II, 1

Fie $|AM|$ mediană în triunghiul ABD, $M \in |BC|$. Atunci $\|BD\| = 2\|AM\|$ și ABM este isoscel; deci $m(\widehat{BAM}) = 15$ și $m(\widehat{AMD}) = 30$, de unde AMC este isoscel, cu $|AM| \equiv |AC|$.

23. Cum $\triangle AA_1C = \triangle BCB_1$ obținem $|A_1C| \equiv |B_1C|$ și $m(\widehat{B_1CB}) + m(\widehat{A_1CA}) = 90$. Prin urmare A_1CB_1 este dreptunghic isoscel și deci $m(\widehat{CA_1B_1}) = m(\widehat{CB_1A_1}) = 45$. Deci C este punctul de intersecție al diagonalelor pătratului A_1B_1DE (fig. II, 1).

25. Măsurile unghiurilor pentagonului convex $A_1B_1C_1D_1E_1$ sînt notate cu $m(\hat{A}_1) = x$, $m(\hat{B}_1) = y$, $m(\hat{C}_1) = z$, $m(\hat{D}_1) = t$, $m(\hat{E}_1) = u$. Avem $m(\widehat{AC_1D_1}) = 180 - z$, $m(\widehat{AD_1C_1}) = 180 - t$. Atunci din triunghiul AC_1D_1, $m(\hat{A}) = z + t - 180$ (1). Analog: (2) $m(\hat{B}) = t + u - 180$, (3) $m(\hat{C}) = u + x - 180$, (4) $m(\hat{D}) = x + y - 180$, (5) $m(\hat{E}) = y + z - 180$. Adunăm acum membru cu membru formulele (1) — (5).

26. Fie ABC un triunghi și $|BM|$ mediana laturii $|AC|$. Inegalitatea $\|AC\| < 2\|BM\|$, este echivalentă cu $\|AM\| < \|BM\|$ și $\|MC\| < \|BM\|$, deci $m(\widehat{BAM}) < m(\widehat{ABM})$ și $m(\widehat{MBC}) < m(\widehat{MCB})$ care adunate conduc la $m(\widehat{ABC}) < m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180 - m(\hat{B})$, de unde $m(\hat{B}) < 90$. Analog se tratează celelalte două cazuri.

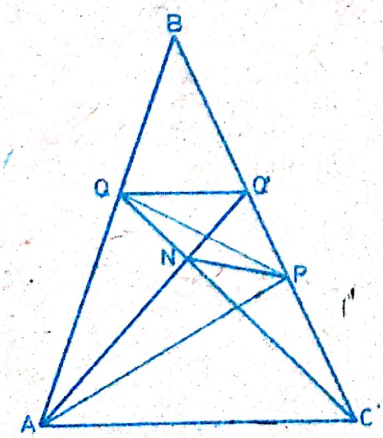


Fig. II, 2

27. Deoarece $m(\widehat{ACQ}) < m(\widehat{ACB})$ rezultă $|CQ \subset \text{Int } \widehat{ACB}$, și deci $Q \in |AB|$. Fie $Q' \in |BC|$, $QQ' \| AC$ și $\{N\} = |AQ'| \cap |QC|$, avînd în vedere că într-un trapez diagonalele se intersectează. Din $m(\widehat{CAP}) < m(\widehat{CAQ'})$ rezultă $P \in |CQ'|$. Avem $|NC| \equiv |AC|$; dar $|AC| \equiv |PC|$, ACP fiind isoscel. Deci $|NC| \equiv |PC|$, și atunci NCP este isoscel. Atunci $m(\widehat{NPC}) = 80$. În plus $m(\widehat{Q'NP}) = 40$, ca unghi exterior lui ANP. Cum $m(\widehat{NQ'P}) = 40$ rezultă că NPQ' este isoscel iar QNQ' echilateral, deci $QP \perp AQ'$. Atunci $m(\widehat{Q'PQ}) = 50$ (fig. II, 2).

Scanned with OKEN Scanner

29. Se aplică axioma lui *Pasch*.

30. Se aplică convenabil teorema transversalei.

31. $|AF|$ este mediană relativă la ipotenuză în triunghiul dreptunghic ABC, deci $\|AF\| = 1/2 \|BC\|$ (1). Cum E este ortocentrul lui DBC avem $BK \perp CD$. În triunghiul dreptunghic BKC : $\|KF\| = 1/2 \|BC\|$ (2). Din (1), (2) rezultă că triunghiul AKF este isoscel.

(Rădiță, M. & Simu, D, R.M.T. 3/1972)

32. $EGFH$ este paralelogram și E este situat pe mediatoarea segmentului, $|BC|$, deci $1/2 \|CE\| = 1/2 \|EB\|$ (1). Dar $|HF|$ este linie mijlocie în EBC, $\|HF\| = 1/2 \|EB\|$ (2). Analog $\|FG\| = 1/2 \|EC\|$ (3). Din (1), (2), (3) rezultă $|HF| \equiv |FG|$.

33. $\triangle ABM \equiv \triangle CDN$, cazul L.U.L., deci $\widehat{BMA} \equiv \widehat{CND}$. Pe de altă parte $\widehat{CND} \equiv \widehat{NDM}$, deoarece $BC \| AD$. Urmează că $|NF|$ este linie mijlocie în BEC; de asemenea, $|ME|$ este linie mijlocie în AFD.

(Cărbunaru, C., G.M.-B 12/1973)

34. Analog problemei anterioare.

35. Analog cazului convex.

36. Fie A_2, B_2, C_2 respectiv mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Mijloacele A_3, B_3, C_3 ale segmentelor $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ se găsesc pe laturile $[B_2C_2]$, $[C_2A_2]$, $[A_2B_2]$ ale triunghiului $A_2B_2C_2$. În plus din $A_1 \in |BC|$ rezultă $C_3 \in |A_2B_2|$. Analog $B_3 \in |C_2A_2|$, $A_3 \in |A_2C_2|$. O dreaptă care nu trece printr-un vîrf al unui triunghi nu poate tăia simultan laturile triunghiului (*Pasch*).

37. Fie $E \in DN$ $N \in |DE|$, $|NE| \equiv |DN|$. Segmentul $|MN|$ este linie mijlocie în DAE, deci $\|MN\| = 1/2 \|AE\|$ (1). $\triangle NEB \equiv \triangle DNC$, conform L.U.L., deci $\|BE\| = \|CD\|$, deci $\|MN\| = 1/2 (\|AB\| + \|BE\|)$ (2). Din (1) și (2): $\|AE\| = \|AB\| + \|BE\|$, deci A, B, E sînt coliniare.

38. Fie $\|AD\| > \|BC\|$, $\{M\} = AB \cap CD$; AMD, BMC sînt dreptunghice deci $\|ME\| = 1/2 \|BC\|$, $\|MF\| = 1/2 \|AD\|$. Dar M, E, F sînt coliniare.

39. $m(\widehat{DME}) = m(\widehat{AEM}) + m(\widehat{EAM})$ (1), $\widehat{DME}$ fiind exterior lui AEM. Fie $M_1 \in |EC|$, $MM_1 \perp EC$. Fie $\{F\} = BC \cap MM_1$. Cum $MM_1 \| AB$ avem: $\widehat{EAM} \equiv \widehat{FMD}$ și din (1): $m(\widehat{DME}) = m(\widehat{AEM}) + m(\widehat{FMD})$ (2). În plus $\|MD\| = \|FC\| = 1/2 \|BC\| = \|AB\| = \|CD\|$ deci $MFCD$ este romb și diagonala $|MC|$ bisectoare, deci: $m(\widehat{FMD}) = 2\, m(\widehat{FMC})$. $|FM_1|$ este linie mijlocie în BCE_1. Deci $\|EM_1\| = \|M_1C\|$ și M se află pe mediatoarea lui $|EC|$. Urmează că EMC este isoscel, de unde $|MM_1$ este și bisectoare. Atunci $\widehat{FMC} \equiv \widehat{FME}$ (4). Conform (2), (3), (4) rezultă concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

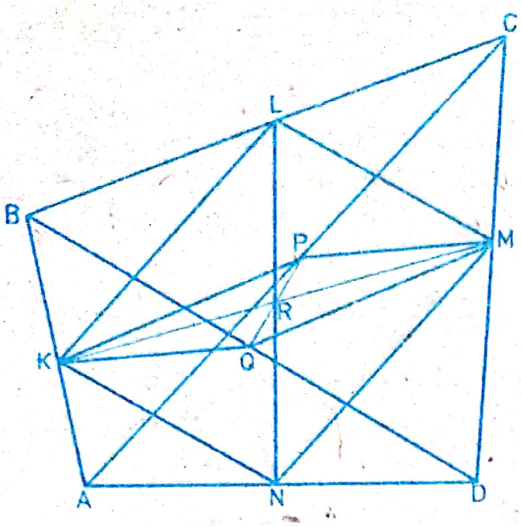


Fig. II, 3

40. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $K \in |AB|$, $L \in |BC|$, $M \in |CD|$, $N \in |DA|$ respectiv mijloacele laturilor sale (fig. II, 3). Atunci $KLMN$ este un paralelogram și $|KR| \equiv |RM|$ unde: $\{R\} = |KM| \cap |LN|$. Fie $P \in |AC|$, $Q \in |BD|$, $|AP| \equiv |PC|$, $|BQ| \equiv |BD|$. Atunci $|KP| \equiv |QM|$, $KP \parallel QM$, deoarece $|KP|$, $|QM|$ sînt linii mijlocii în ABC, DBC cu baza $|BC|$ comună. Deci $KPMQ$ este paralelogram și R este mijlocul diagonalei sale $|KM|$. Deci Q, R, P sînt coliniare.

41. Fie $\{K\} = AN \cap BC$, $\{L\} = AM \cap BC$. Atunci $|AB| \equiv |BL|$, $|AC| \equiv |KC|$, AKC și ABL fiind triunghiuri isoscele. Cum $|MN|$ este linie mijlocie în AKL, urmează că $\| MN \| = 1/2 \| KL \| = p$

42. $MNPQ$ este paralelogram deoarece $|MN|$, $|QP|$ sînt respectiv linii mijlocii în triunghiurile ABC, ACD, iar $|MP|$, $|NQ|$ sînt diagonalele sale.

43. $BPQA$ și $PCDQ$ sînt paralelograme, deci $|AM| \equiv |MP|$, $|PN| \equiv |ND|$. Atunci $|MN|$ este linie mijlocie în APD.

44. $\triangle KBE \equiv \triangle ECD$, deci au perimetrele egale. Dar $|BE|$ este linie mijlocie în KAD, deci perimetrul lui KAD este de două ori mai mare ca perimetrul lui KBE.

45. În triunghiul ABC, avem de exemplu: $\| AC \| < \| AB \| + \| BC \|$. Dar $\| DE \| = 1/2 \| AC \|$ unde $|DE|$ este linie mijlocie a lui ABC, $D \in |AB|$, $E \in |BC|$.

46. Fie $G \in |AC|$, $DG \parallel BC$. Fie $\{A_2\} = |AA_1| \cap |DG|$. Deoarece ADG este isoscel, $\| EA_1 \| = \| DA_2 \| = 1/2 \| GD \|$. Fie $M \in |CF|$, $|CM| \equiv |MF|$. Triunghiul CDF fiind dreptunghic, $|CM| \equiv |MD| \equiv |MF|$, deci $\widehat{GCD} \equiv \widehat{DCM} \equiv \widehat{CDM}$ de unde $DM \parallel AC$, deci $GDMC$ este paralelogram. Deci $\| FC \| = 2 \| MC \| = 2 \| GD \| = 4 \| EA_1 \|$.

47. Fie $a \in M$. Fie $BB_1 \perp a$, $CC_1 \perp a$, $B_1, C_1 \in a$. Atunci $d(B, a) = \| BB_1 \|$, $d(C, a) = \| CC_1 \|$. Fie $D \in |BC|$, $|BD| \equiv |CD|$. Fie $K \in a$, $DK \perp a$. B_1C_1 CB este trapez, $|KD|$ linia sa mijlocie, deci: $d(B, a) + d(C, a) = 2 \| KD \|$. Dar KAD este dreptunghic și atunci $\| KD \| \leqslant \| AD \|$. Urmează că $d(B, a) + d(C, a)$ este maximizată pentru $K = A$, deci pentru $a = a_0$.

48. Fie $F' \in |AB|$, $FF' \parallel AC$. Să notăm: $|BD| = \| AC \| = b$, $\| AB \| = c$, $b < c$. Atunci $\| FF' \| = b/2$, $\| AF' \| = \| F'B \| = c/2$, $|FF'|$ fiind linie mijlocie în ABC. Avem: $\| AE \| = \| ED \| = (c - b)/2$. Din calcul, $EF'F$ este isoscel. Deci $\widehat{BEF} \equiv \widehat{EFF'}$. Cum $\widehat{BF'F}$ este exterior lui $EF'F$ urmează că: $m(\hat{A}) = 2\, m(\widehat{BEF})$.

49. L și N sînt centre de greutate ale triunghiurilor ABC și ACD. Atunci $\| BL \| = 2/3 \| OB \| = 1/3 \| BD \|$, unde $\{0\} = |AC| \cap |BD|$. Analog $\| DN \| = 1/3 \| BD \|$.

Scanned with OKEN Scanner

51. Fie ABC un triunghi. Fie A_1 punctul de intersecție al bisectoarei interioare a unghiului $\hat{A}$ cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\hat{C}$ și $\hat{B}$ situate în semiplanul determinat de BC ce nu conține punctul A. Fie analog punctele B_1, C_1. Notăm: $m(\widehat{BAA_1}) = x$, $m(\widehat{C_1AB}) = y$. Atunci $x + y = 90$, deci $AC_1 \perp AA_1$. Analog BB_1, CC_1 sînt înălțimi în triunghiul $A_1B_1C_1$.

52. În triunghiul CHA_1 și în CC_1B, $m(\widehat{HA_1C}) = m(\widehat{BC_1C}) = 90$, $m(\widehat{HCA_1}) = m(\widehat{C_1CB})$, deci $m(\widehat{A_1HC}) = m(\hat{B})$.

53. Presupunem că $AF \perp BE$; fie $DQ \parallel BE$, $Q \in |AC|$, atunci $AF \perp DQ$. În triunghiul ADQ avem $FQ \perp AD$, deci $FQ \parallel DC$ și atunci (1) $\frac{\|FE\|}{\|ED\|} = \frac{\|EQ\|}{\|QC\|}$, apoi din $DQ \parallel BE$: (2) $\frac{\|EQ\|}{\|QC\|} = \frac{\|BD\|}{\|DC\|}$. Din (1), (2) rezultă: (3) $\frac{\|FE\|}{\|FD\|} = \frac{\|BD\|}{\|DC\|}$. Reciproc, să presupunem că are loc (3). Din $DQ \parallel BE$ urmează $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|EQ\|}{\|QC\|}$. Atunci $FQ \parallel DC$, adică $FQ \perp AD$, și din $DE \perp AQ$ rezultă $AF \perp DQ$ și din $DQ \parallel BE$ obținem $AF \perp BE$.

54. CM taie AB în P iar AN taie CD în Q. Triunghiurile NAB, NQC sînt congruente, deci $|AB| \equiv |CQ|$ și la fel $|AP| \equiv |CD|$. Dacă AN ar fi paralelă cu MC, atunci $APCQ$ ar fi paralelogram și ar rezulta $|AP| \equiv |CQ|$, de unde $|CD| \equiv |AB|$, contradicție.

55. 1) $m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{ACF}) = 45 + 90 + 45 = 180$. 2) Fie C_1 piciorul perpendicularei coborîte din C pe AB. Atunci $\widehat{BCC_1} \equiv \widehat{DBD_1}$ și $|BC_1| \equiv |DD_1|$. Analog $|C_1A| \equiv |FF_1|$. 3) $m(\widehat{EBG}) = 45 = m(\widehat{BGA})$ deci $\widehat{EBG} \equiv \widehat{BGA}$ deci $BE \parallel AG$. 4) $\triangle KCE \equiv \triangle ABC$, de unde $\widehat{KCE} \equiv \widehat{CBA}$, dar $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C_1CA}$, deci $\widehat{ECK} \equiv \widehat{C_1CA}$, K, C, C_1 sînt coliniare și $CC_1 \perp AB$.

56. Fie $A, B, C \in \mathbf{R}^n$; dacă $A \mathcal{R} B$, $B \mathcal{R} C$ atunci $A \mathcal{R} C$ avînd drept constantă de proporționalitate produsul constantelor de proporționalitate relativ la A, B respectiv B, C. Deci $\mathcal{R}$ este tranzitivă. Prin definiție $\mathbf{R}^n_*/\mathcal{R} = \{\hat{A} \mid A \in \mathbf{R}^n_*\}$, unde: $\hat{A} = \{B \in \mathbf{R}^n_* \mid B \mathcal{R} A\}$. Pentru fiecare $A \in \mathbf{R}^n_*$ avem: $\hat{A} = \{(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)/k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$, unde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

57. Dacă $M \in |AB|$, fie C exterior dreptei AB și fie $N \in |AC|$. Fie $|CM| \cap |BN| = \{0\}$, $AO \cap |BC| = \{Q\}$. Dacă M este mijlocul lui $|AB|$ problema nu are soluție. În caz contrar, avem $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} \neq 1$, și conform teoremei lui *Ceva*: $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} \cdot \frac{\|QB\|}{\|QC\|} \cdot \frac{\|NC\|}{\|NA\|} = 1$ (1), deci $\frac{\|QB\|}{\|QC\|} \neq \frac{\|NA\|}{\|NC\|}$ deci $|NQ| \not\parallel |AB|$. Fie $\{T\} = NQ \cap AB$. Din teorema lui *Menelaus* $\frac{\|TA\|}{\|TB\|} \cdot \frac{\|QB\|}{\|QC\|} \cdot \frac{\|NC\|}{\|NA\|} = 1$ (2); din (1), (2) rezultă $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = \frac{\|TA\|}{\|TB\|}$ deci M și T sînt conjugate armonic față de A și B. Dacă $M \notin [AB]$, fie $C \notin AB$ și $N \in |AC|$. Din axioma lui *Pasch* rezultă că MN taie segmentul $|CB|$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\{P\} = MN \cap |BC|$, $\{O\} = |AP| \cap |BN|$, $\{T\} = CO \cap AB$. Conform teoremei lui *Ceva*, în ABC, pentru cevienele AP, CT, BN și conform teoremei lui *Menelaus*, relativ la transversala MN, rezultă că T este conjugatul armonic al lui M.

59. Fie $KE \parallel AL$, $E \in |BC|$, atunci $\frac{\|KM\|}{\|MB\|} = \frac{\|EL\|}{\|LB\|}$. Notăm $\|BC\| = h$. Din $\|CL\| = (c/c+d)h$, $\|LB\| = (d/c+d)h$ și $\|EL\| = (b/a+b)\|CL\| = (b/a+b)(c/c+d)h$, putem obține: $\frac{\|KM\|}{\|MB\|} = \frac{\|EL\|}{\|LB\|} = \frac{bc}{d(a+b)}$.

Analog determinăm raportul $\frac{\|LM\|}{\|MA\|}$ ducînd $LF \parallel BK$, $F \in |AC|$.

60. Din definiția unghiurilor alterne interne rezultă că $|CA$ și $|BN$ sînt conținute în semiplane opuse față de BC, deci $ABNC$ este trapez; analog $ABCM$ și $APBC$ sînt trapeze. Fie atunci: $\{E\} = |BM| \cap |AC|$, $\{D\} = |AN| \cap |BC|$, $\{F\} = |CP| \cap |AB|$.

Dreptele CM și AB sînt paralele, prin urmare: $\frac{\|EA\|}{\|EC\|} = \frac{\|AB\|}{\|CM\|}$ (1).

Scriind rapoartele de asemănare în triunghiurile asemenea ABC, CAM obținem $\frac{\|CM\|}{\|AC\|} = \frac{\|AC\|}{\|AB\|}$ de unde: $\frac{\|EA\|}{\|EC\|} = \frac{c^2}{b^2}$. Analog $\frac{\|DC\|}{\|DB\|} = \frac{b^2}{a^2}$ și $\frac{\|FB\|}{\|FA\|} = \frac{a^2}{c^2}$; de unde $\frac{\|EA\|}{\|EC\|} \cdot \frac{\|DC\|}{\|DB\|} \cdot \frac{\|FB\|}{\|FA\|} = 1$, de unde, folosind reciproca teoremei lui *Ceva* rezultă: $BM \cap AN \cap CP \neq \emptyset$ (fig. II, 4).

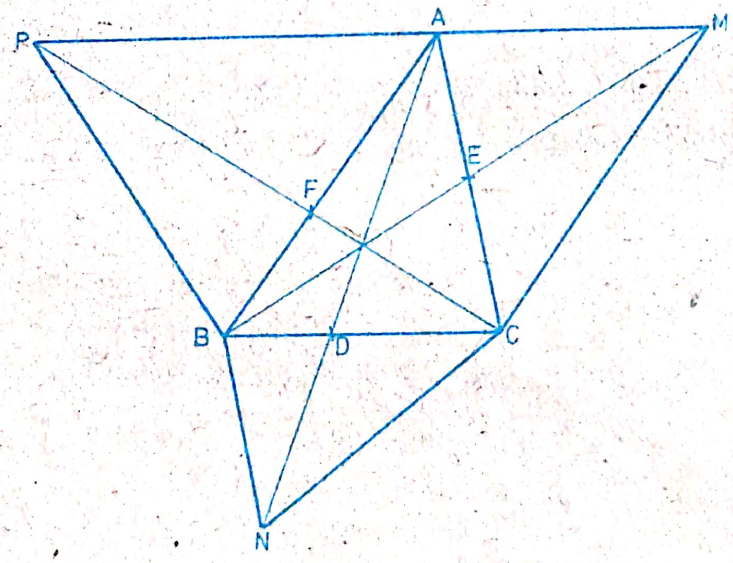


Fig. II, 4

61. Presupunem $\|AB\| < \|BC\|$, pentru a face o alegere. Atunci $m(\hat{A}) > m(\hat{C})$, $m(\widehat{CBD}) > m(\widehat{ABD})$ de unde $m(\widehat{CBD}) > 1/2\,(m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{CBD})) = 1/2\ m(\hat{B})$. În plus $\frac{\|AE\|}{\|EC\|} = \frac{\|AB\|}{\|BC\|} < 1$, deci $\|AE\| < \|EC\|$, de unde $\|AE\| < 1/2(\|AE\| + \|EC\|) = 1/2\,\|AC\|$, adică: $\|AE\| < \|AF\|$, deci $E \in |DF|$.

Scanned with OKEN Scanner

62. Fie $E \in \text{Int } \widehat{ACB}$, şi $|CE \cap |BF| \neq \emptyset$, conform teoremei transversalei. La fel $|BF \cap |CE| \neq \emptyset$. Notăm $\{I\} = |BF| \cap |CE|$, deci $I \in \text{Int } ABC$, deci $I \in \text{Int } \widehat{BAC}$ şi $|AI \cap |BC| \neq \emptyset$, conform teoremei transversalei. Fie $\{K\} = |AI \cap |BC|$. Conform teoremei lui *Ceva* $\frac{\|EA\|}{\|EB\|} \cdot \frac{\|KB\|}{\|KC\|} \cdot \frac{\|FC\|}{\|FA\|} = 1$, şi atunci cum $\frac{\|EA\|}{\|EB\|} = \frac{\|FA\|}{\|FC\|}$ *(Thales)* deducem $\|KB\| = \|KC\|$, adică K este mijlocul segmentului $|BC|$. Deci $I \in |AK|$; reciproc analog; deci $|AK| = \mathfrak{M}$.

63. Dreapta d intersectează triunghiul ABC; în caz contrar ar rezulta că A, B, C se găsesc într-un semiplan deschis S determinat de d; S fiind convexă, $|BC| \subset S$, deci $M \in S$, unde M este mijlocul lui $|BC|$, deci $|AM| \subset S$, şi atunci $G \in S$, unde $G \in |AM|$ este centrul de greutate al lui ABC; atunci $G \notin d$, contradicţie. Conform axiomei lui *Pasch* cel puţin unul dintre $|AB|$ $|AC|$ este intersectat de d. b) Se disting două cazuri:
I. $d \parallel BC$, şi avem: $\frac{\|PB\|}{\|PA\|} = \frac{\|GM\|}{\|GA\|} = \frac{\|QC\|}{\|QA\|} = 1/2$ deci $\frac{\|PB\|}{\|PA\|} + \frac{\|QC\|}{\|QA\|} = 1$. II. $d \cap BC \neq \emptyset$, fie $\{R\} = d \cap BC$; cum d intersectează exact două laturi ale triunghiului şi anume pe $|AB|$ şi $|AC|$ deducem $R \notin [BC]$ şi să presupunem $B \in |RC|$. Fie h paralela prin A la BC; avem $d \cap h \neq \emptyset$, altfel prin R trec două paralele distincte la dreapta h, şi fie $\{T\} = d \cap h$. Din asemănări: $\frac{\|PB\|}{\|PA\|} = \frac{\|RB\|}{\|AT\|}$, $\frac{\|QC\|}{\|QA\|} = \frac{\|RC\|}{\|AT\|}$, $\frac{\|RM\|}{\|AT\|} = \frac{\|GM\|}{\|GA\|} = \frac{1}{2}$. După transformări elementare obţinem: $\frac{\|PB\|}{\|PA\|} + \frac{\|QC\|}{\|QA\|} = 2\frac{\|RM\|}{\|AT\|} = 1$. Analog pentru c) şi d).

64. 1) Prin reducere la absurd şi folosind proprietăţile liniei mijlocii. 2), 3), 4), 5). Presupunem $AB \parallel UD$ (fig. II, 5) şi atunci prin D se pot duce două paralele la AB şi anume UD şi DC, contradicţie. Analog $DN \cap AB \neq \emptyset$. În ABC dreapta MN intersectează $|AB|$ şi $|BC|$, deci nu intersectează $|AC|$, deci $U \notin |AC|$, şi fie $C \in |AU|$, pentru a face o alegere. În AUX, CD intersectează $|AU|$, dar nu intersectează $|AX|$, deci intersectează $|XU|$, deci $D \in |XU|$; $ABCD$ fiind patrulater convex, diagonalele se intersectează, deci B, D sînt separate de către AC; cum M, B sînt de aceeaşi parte a lui AC, urmează că D, M sînt separate de AC. Atunci în triunghiul DXM

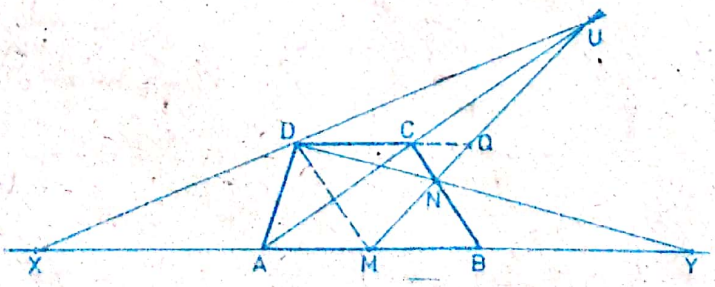


Fig. II, 5

dreapta AC intersectează $|DM|$ și nu intersectează $|XD|$, deci $A \in |XM|$, și: $|UA \subseteq \text{Int } \widehat{XUM}$ și notînd $\{Q\} = DC \cap UM$ avem $|DQ| \subset \text{Int } \widehat{XUM}$, deci $C \in |DQ|$. Atunci $\|DC\| + \|CQ\| = \|DQ\|$. Din asemănări: $\|MB\| = k\|CQ\|$, $\|BY\| = k\|DC\|$, $\|MY\| = k\|DQ\|$, $k > 0$. Rezultă: $\|MB\| + \|BY\| = MY\|$, deci $B \in |MY|$. 6) Se aplică teorema lui *Menelaus* triunghiului ABC și transversalei UNM.

65. $\triangle PBR \sim \triangle ABC$, deoarece $\widehat{PBR} \equiv \widehat{ABC}$ și $\dfrac{\|PB\|}{\|AB\|} = \dfrac{\|BR\|}{\|BC\|}$.

Analog $\triangle QRC \sim \triangle ABC$. De unde: $m(\widehat{APR}) = m(\widehat{APB}) - m(\widehat{BPR}) = m(\widehat{APB}) - m(\widehat{BAC})$. Rezultă: $m(\widehat{APR}) + m(\widehat{PAQ}) = m(\widehat{APB}) + 2m(\widehat{PAB}) = 180$, de unde $PR \parallel AQ$. Analog $QR \parallel AP$.

66. $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDE}) + m(\widehat{BED})$, deoarece $\widehat{ABD}$ este unghi exterior triunghiului BDE. Din enunț $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$, iar $\widehat{BDE} \equiv \widehat{BED}$ deoarece triunghiul BDE este isoscel. Deci: $\widehat{BED} \equiv \widehat{BDE} \equiv \hat{C}$ (1). Cum $\widehat{FDC} \equiv \widehat{BDE}$, din (1) rezultă că $\widehat{FDC} \equiv \hat{C}$ (2), de unde: $|FD| \equiv |FC|$ (3). În plus $m(\widehat{AFD}) = m(\hat{C}) + m(\widehat{FDC})$ (4) căci $\widehat{AFD}$ este unghi exterior în CFD. Din (2) și (4): $m(\widehat{AFD}) = 2m(\hat{C})$. În plus, $m(\widehat{ADF}) = 90 - m(\widehat{FDC}) = 90 - m(\hat{C})$ și din triunghiul ADF găsim $m(\widehat{DAF}) = 180 - (90 + m(\hat{C})) = 90 - m(\hat{C}) = m(\widehat{ADF})$, prin urmare $|AF| \equiv |FD|$. Fie $B_1 \in |CD|$ astfel încît $|DB_1| \equiv |DB|$. Atunci $|AB| \equiv |AB_1|$ și $m(\widehat{AB_1D}) = m(\widehat{ABB_1}) = 2m(\hat{C})$. Dar $m(\widehat{AB_1D}) = m(\hat{C}) + m(\widehat{B_1AC})$, fiind unghi exterior în AB_1C. Deci $\widehat{B_1AC} \equiv \hat{C}$. În final, $\|AB\| = \|AB_1\| = \|B_1C\| = \|DC\| - \|DB_1\| = \|DC\| - \|DB\|$.

67. Notăm $\{O\} = AB_1 \cap A_1B$ și fie $D \in d$, $OD \perp d$. Deoarece $\triangle ABA_1 \sim \triangle DBO$ și $\triangle BAB_1 \sim \triangle DAO$ atunci: $\dfrac{\|OD\|}{a} = \dfrac{\|BD\|}{\|AB\|}$ și $\dfrac{\|OD\|}{b} = \dfrac{\|AD\|}{\|AB\|}$ de unde: $\|OD\| \cdot (1/a + 1/b) = \dfrac{\|AD\| + \|DB\|}{\|AB\|} = 1$, sau $\|OD\| = ab/(a+b)$.

68. Fie F mijlocul laturii $|AC|$. Triunghiurile AHB și EOF sînt asemenea deoarece $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{OFE})$ și $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{OEF})$, ca unghiuri cu laturile paralele. Deci $\dfrac{\|OE\|}{\|AH\|} = \dfrac{\|EF\|}{\|AB\|} = 1/2$.

69. Fie M mijlocul lui $|BC|$. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului, deci: $\|GM\| = \dfrac{1}{3}\|AM\|$. Dacă $\|AB\| = \|AC\|$ problema este rezolvată. Fie $\|AB\| \neq \|AC\|$, deci avem ordonarea $B—M—E—D—C$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\triangle AMD \sim \triangle GME$ rezultă că: $\frac{\| ME \|}{\| MD \|} = \frac{\| GM \|}{\| MA \|} = 1/3$, de unde $\| MD \| = 3 \| ME \|$, $\| BD \| = \| BM \| + \| MD \|$ și $\| DC \| = \| MC \| - \| MD \|$. Avem: $\| BD \|^2 - \| DC \|^2 = (\| BM \| + \| MD \|)^2 - (\| MC \| - \| MD \|)^2 = (\| BM \| + \| MC \|)(\| BM \| + \| MD \| - \| MC \| + \| MD \|) = \| BC \|(\| BD \| - \| MC \| + \| MD \|) = \| BC \|(\| BD \| - \| CD \|) = 2 \| BC \| \cdot \| MD \| = 6 \| BC \| \cdot \| ME \|$. La fel $\| BE \|^2 - \| CE \|^2 = (\| BE \| + \| EC \|)(\| BE \| - \| EC \|) = \| BC \|(\| BM \| + \| ME \| - \| BM \| + \| ME \|) = 2 \| BC \| \cdot \| ME \|$. În final $\| BD \|^2 - \| DC \|^2 = 6 \| BC \| \cdot \| ME \| = 3(\| BE \|^2 - \| CE \|^2)$.

70. Avem $\widehat{DBE} \equiv \widehat{ABC}$ (1). Din asemănarea triunghiurilor BCE și ABD avem: $\frac{\| BE \|}{\| BD \|} = \frac{\| BC \|}{\| AB \|}$ (2). Din (1), (2) rezultă concluzia.

71. Fie S semiplanul limitat de AB ce nu conține punctul B_1. Rezultă că $A_1, C_1 \in S$, deci $[A_1C_1] \subset S$, deci $C \in S$, deci B_1 și C sînt separate de AB, de unde rezultă că: $| AB \subseteq \text{Int } \widehat{B_1AC}$. Din $m(\widehat{B_1AB}) = m(\widehat{C_1BC}) = m(\widehat{A_1CA})$ urmează: $m(\widehat{AA_1C}) + m(\widehat{A_1CA}) = 180 - m(\widehat{A_1AC}) = m(\widehat{B_1AB}) + m(\widehat{BAC})$. Deci $\widehat{AA_1C} \equiv \widehat{BAC}$. Analog $\widehat{AB_1B} \equiv \widehat{ABC}$ de unde rezultă asemănarea din enunț.

72. Fie $D \in [CA$, astfel încît $A \in | CD |$ și $| AD | \equiv | AB |$. Relația din enunț se scrie $a/b = (b + c)/a$ sau $a/b = \frac{\| DC \|}{a}$, deci $\triangle CAB \sim \triangle CBD$, și deci $\hat{A} \equiv \widehat{CBD}$. În plus $\hat{B} \equiv \widehat{BDA} \equiv \widehat{DBA}$. Rezultă $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\widehat{DBA})$.

73. Fie $ABCD$ un trapez, $AD \| BC$, E mijlocul lui $| BC |$, F mijlocul lui $| AD |$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Avem $\triangle OAF \sim \triangle OCE$, din $\triangle AOD \sim \triangle COB$. Urmează că $\widehat{AOF} \equiv \widehat{COE}$.

74. Fie $| AD$, $D \in | BC |$, bisectoarea unghiului $\hat{A}$; se aplică teorema bisectoarei. Rezultă $a = \sqrt{b^2 + bc}$.

75. Triunghiurile ADC și AKO, respectiv ADB și KDO sînt asemenea; atunci $y/a = h_1/(h_1 + h_2)$, $y/b = h_2(h_1 + h_2)$, unde $y = \| KO \|$. Însumînd aceste două formule obținem $y = ab/(a + b)$. Analog $z = ab/(a + b)$, $z = \| OM \|$.

76. Folosind congruențele din ipoteză rezultă $B_1 \in | AM |$. În triunghiul B_1BC; MB este bisectoare și atunci: $\frac{\| B_1M \|}{\| MC \|} = \frac{\| BB_1 \|}{\| BC \|}$ (1). În ABM, BB_1 este înălțime și bisectoare, deci și mediană. Deci $| AB_1 | \equiv | B_1M |$ și din (1): $\frac{\| BB_1 \|}{\| BC \|} = 1/2$. Deci $m(\hat{C}) = 30$. În plus $\widehat{CBB_1} \in 60°$ și $\widehat{CMB} \equiv \widehat{ABB_1} \equiv \widehat{MBB_1} \in 30°$. În concluzie $\widehat{CBA} \in 90°$.

Scanned with OKEN Scanner

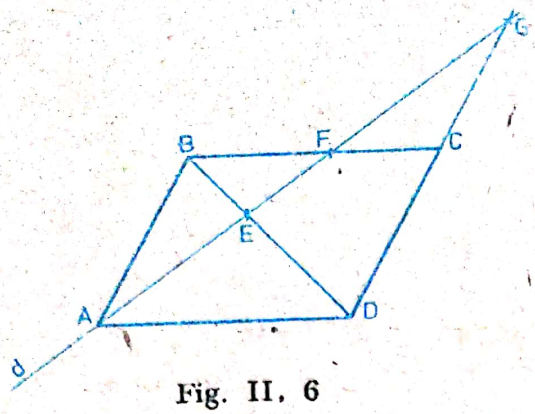


Fig. II, 6

77. 1) Paralelogramul $ABCD$ este un patrulater convex deci punctele D, C, F sînt în același semiplan S față de dreapta AB (fig. II, 6). Cum $DC \parallel AB$, rezultă $DC \subset S$, deci $G \in S$. Dar $G \in d$, deci $G \in S \cap d = |AF$. Cum $F \in |BC|$ rezultă că $|AF \subseteq$ $\subseteq$ Int $\widehat{BAC}$, deci $G \in$ Int $\widehat{BAC}$, deci G se găsește în semiplanul limitat de AC care conține punctul B. (1) Cum B, D sînt separate de AC rezultă că D nu aparține semiplanului limitat de AC care conține punctul B (2). Din (1), (2) rezultă că D, G sînt separate de AC deci $C \in |DG|$. 2) Deoarece $\widehat{BFA} \equiv \widehat{FAD}$, $\widehat{BAF} \equiv \widehat{FGD}$ din asemănare obținem: $\frac{\|AF\|}{\|AG\|} = \frac{\|BF\|}{\|AD\|}$ (3). Analog $\frac{\|BF\|}{\|AD\|} = \frac{\|EF\|}{\|AE\|}$ (4). Din (3), (4) rezultă $\frac{\|AF\|}{\|AG\|} = \frac{\|EF\|}{\|AE\|}$.

78. Paralela prin E la AB intersectează paralela prin A la BE în G. Paralela prin E la CD intersectează paralela prin D la EC în H (fig. II,7). Deci $ABEG$, $ECHD$ sînt paralelograme. Din $\frac{\|AG\|}{\|HD\|} = \frac{\|BE\|}{\|EC\|} = \frac{\|AF\|}{\|FD\|}$ și $\widehat{GAF} \equiv \widehat{FDH}$ urmează $\triangle AGF \sim \triangle DHF$ și deci $\widehat{AFG} \equiv \widehat{DFH}$, prin urmare G, F, H sînt coliniare. În plus: $\frac{\|AF\|}{\|FD\|} = \frac{\|GF\|}{\|FH\|}$. În consecință $\frac{\|GH\|}{\|FH\|} =$ $= \frac{\|AB\|}{\|CD\|} = \frac{\|GE\|}{\|EH\|}$, și aplicăm reciproca teoremei bisectoarei.

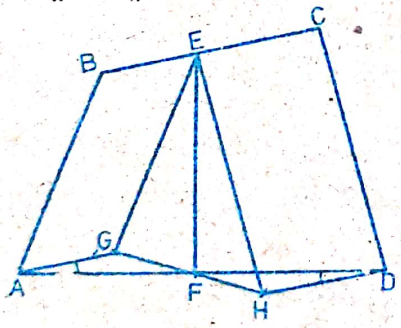


Fig. II, 7

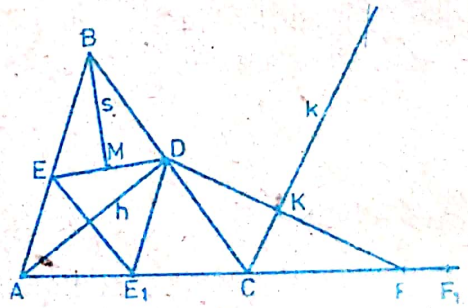


Fig. II, 8

79. Fie $\{M\} = s \cap |DE|$, $\{K\} = k \cap |DF|$, și $E_1 \in |AC|$, astfel încît: $|AE_1| \equiv |AE|$ (fig. II, 8). Atunci: $m(\widehat{AE_1D}) = m(\widehat{AED}) = 90 +$ $+ m(\hat{B})/2$; $\widehat{BCA}$ este un unghi exterior triunghiului isoscel DCF și deci $m(\widehat{CDF}) = 1/2\ m(\widehat{BCA})$. În plus: $m(\widehat{CDA}) = 1/2\ m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ABC})$, deci: $m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{CDF}) = 1/2\ m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ABC}) + 1/2\ m(\widehat{BCA}) =$ $= 90 + 1/2\ m(\widehat{ABC})$. În concluzie $\triangle ADF \sim \triangle AED$.

Scanned with OKEN Scanner

80. Fie CC_1 a treia înălțime (fig. II, 9). Atunci $A_2A_3 \| CC_1$ și deci:

$$\frac{\| MA_2 \|}{\| HC \|} = \frac{\| MA_3 \|}{\| HC_1 \|}.$$

La fel, din: $MA_3 \| HC_1$ avem:

$$\frac{\| MA_3 \|}{\| HC_1 \|} = \frac{\| AA_3 \|}{\| AC_1 \|}.$$

Pe de altă parte, din $\triangle AA_2A_3 \sim \triangle ACC_1$ urmează

$$\frac{\| AA_3 \|}{\| AC_1 \|} = \frac{\| AA_2 \|}{\| AC \|}.$$

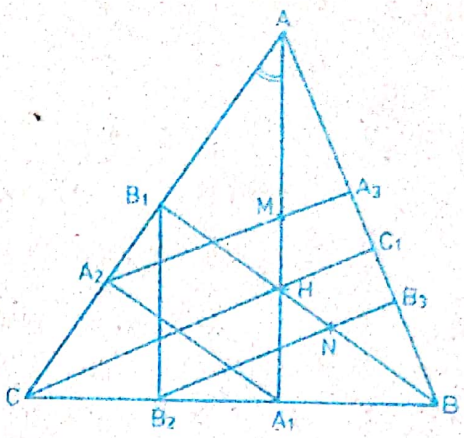


Fig. II, 9

În consecință: $\frac{\| MA_2 \|}{\| HC \|} = \frac{\| AA_2 \|}{\| AC \|}$ (1). Analog: $\frac{\| NB_2 \|}{\| HC \|} = \frac{\| BB_3 \|}{\| BC_1 \|} = \frac{\| BB_2 \|}{\| BC \|}$ (2). Din asemănările triunghiurilor: AA_1A_2 și BB_1B_2, respectiv: A_1A_2C și B_1B_2C rezultă: $\frac{\| AA_2 \|}{\| AC \|} = \frac{\| BB_2 \|}{\| BC \|}$ (3).

Din (1), (2), (3) rezultă: $\frac{\| MA_2 \|}{\| HC \|} = \frac{\| NB_2 \|}{\| HC \|}$, deci $|MA_2| \equiv |NB_2|$; mai mult, $\widehat{AMA_2} \equiv \widehat{B_1B_2N} \equiv \hat{B}$, $\widehat{MA_2A_1} \equiv \widehat{B_2NB_1} \equiv \hat{A}$, deci $\triangle A_1A_2B \equiv \triangle B_1B_2N$. Fiecare dintre aceste două triunghiuri are cîte două unghiuri congruente cu unghiuri ale triunghiului ABC, deci sînt asemenea cu ABC.

81. Conform teoremei lui *Pitagora* generalizată: $\| AB \|^2 = \| BC \|^2 + \| AC \|^2 - 2 \| AC \| \cdot \| CB_1 \|$, $\| AC \|^2 = \| AB \|^2 + \| BC \|^2 - 2 \| AB \| \cdot \| BC_1 \|$ (1). Adunînd formulele (1) membru cu membru, după transformări elementare, rezultă concluzia dorită.

82. Fie AA_1 înălțime în ABC, $A_1 \in |BC|$. Presupunem că M este între C și A_1, și aplicăm teorema lui *Pitagora* generalizată în triunghiul AMC. Analog pentru alte poziții ale lui M.

84. Se aplică *Pitagora* generalizată și faptul că într-un triunghi dreptunghic cateta opusă unui unghi de măsură 30 are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

85. Fie $\| OA \| = \| OB \| = \| BC \| = \| CD \| = a$. Atunci $\| AB \|^2 = 2a^2 = 2a\, a = \| BD \| \cdot \| BC \|$ și $\widehat{ABD}$ fiind unghi comun rezultă asemănarea triunghiurilor din enunț.

86. În paralelogramul $ABCD$: $\| AC \|^2 \cdot \| BD \|^2 = \| AB \|^4 + \| AD \|^4$ (1). Pe de altă parte: $\| AC \|^2 + \| BD \|^2 = 2(\| AB \|^2 + \| AD \|^2)$. Notăm $\| AC \|^2 = x_1$, $\| BD \|^2 = x_2$. Atunci x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației de gradul doi:

$$x^2 - 2(\| AB \|^2 + \| AD \|^2)x + (\| AB \|^4 + \| AD \|^4) = 0.$$

Rezolvînd, obținem: $\| AC \|^2 = \| AB \|^2 + \| AD \|^2 + \| AB \| \cdot \| AD \| \sqrt{2} = \| AB \|^2 + \| AD \|^2 + 2 \| AD \| \cdot \| AB_1 \|$, deoarece $\hat{A}$ este obtuz. S-a luat $BB_1 \perp AD$, $B_1 \in |AD|$. Rezultă că $\| AB_1 \| = \| AB \| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \| BB_1 \|$, deci BAB_1 este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

88. Notăm $a = \| BC \|$, $b = \| AC \|$, $c = \| AB \|$, $c > a$, $c > b$. Avem: $ca^2 > a^3$, $cb^2 > b^3$, de unde adunînd, rezultă relaţia din enunţ.

89. Să notăm: $\| KP \| = y$, $\| KT \| = z$. Conform teoremei înălţimii în ABK, ACK avem $y^2 = mz$, $z^2 = ny$. De unde $y^4/m^2 = ny$, $y^3 = m^2n$, $y = \sqrt[3]{m^2n}$, şi analog: $z = \sqrt[3]{mn^2}$. Conform teoremei lui *Pitagora*, $\| BC \|^2 = \| AB \|^2 + \| AC \|^2 = (m + z)^2 + (n + y)^2 = (m + \sqrt[3]{mn^2})^2 + (n + \sqrt[3]{m^2n})^2 = \sqrt[3]{m^2}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^2 + \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^2 = (\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2})^3$. Obţinem $\| BC \| = (m^{2/3} + n^{2/3})^{3/2}$.

90. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $| AD |$, $| BC |$, şi fie $BE \perp AD$, $CF \perp AD$, $E, F \in | AD |$. Atunci: $\| AC \|^2 - \| AF \|^2 = \| CD \|^2 - \| FD \|^2$, $\| BD \|^2 - \| ED \|^2 = \| AB \|^2 - \| AE \|^2$. Adunînd membru cu membru, după transformări rezultă concluzia.

91. Fie $E \in | BC |$, astfel încît: $m(\widehat{EAC}) = 20$, şi fie $BD \perp AE$, $E \in | AD |$. Cum $\triangle CAE \sim \triangle ABC$, urmează: $\frac{\| CE \|}{a} = \frac{a}{b}$, de unde: $\| CE \| = \frac{a^2}{b}$, $\| BE \| = b - a^2/b$. Cum $m(\widehat{BAD}) = 60$, urmează $\| BD \| = \frac{\sqrt{3}}{2} b$, $\| AD \| = b/2$. Din $\| AE \| = a$ rezultă $\| ED \| = b/2 - a$. Prin urmare: $b - a^2/b = \sqrt{(b/2 - a)^2 + \frac{3}{4} b^2}$, care după transformări conduce la formula din enunţ.

92. Fie a, b, c, respectiv m_a, m_b, m_c lungimile laturilor, respectiv lungimile medianelor. Atunci:

$$a = 2/3 \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}, \quad b = 2/3 \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$$
$$c = 2/3 \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

93. Fie x lungimea acestei bisectoare. Atunci $x = \frac{bc\sqrt{2}}{b + c}$.

94. Fie O punctul de intersecţie a medianelor $| AD |$, $| BE |$, $D \in | BC |$, $E \in | AC |$. Notăm $\| AC \| = b$, $\| BC \| = a$, $\| AB \| = c$, $\| OD \| = x$, $\| OE \| = y$. Din AOB, BOD, AOE avem: $4x^2 + y^2 = b^2/4$, $4x^2 + 16y^2 = a^2$, $4x^2 + 4y^2 = c^2$. Eliminînd x, y între aceste relaţii obţinem $c^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}$. Condiţiile de existenţă ale unui triunghi cu lungimile laturilor a, b, c devin: $5(a + b)^2 > a^2 + b^2$, $5(a - b)^2 > a^2 + b^2$, prima inegalitate fiind valabilă pentru a, b arbitrare iar a doua pentru: $1/2 < a/b < 2$.

95. Fie E, F mijloacele segmentelor $| AB |$, $| CD |$, şi să notăm $a = \| AB \|$, $b = \| CD \|$. $| ME |$, $| MF |$ sînt mediane în triunghiurile ABM, CDM respectiv. Deci $\| ME \|^2 = 1/4 (2 \| AM \|^2 + 2 \| BM \|^2 - \| AB \|^2)$ şi $\| MF \|^2 = 1/4 (2 \| CM \|^2 + 2 \| DM \|^2 - \| CD \|^2)$. Rezultă: $\| ME \|^2 - \| MF \|^2 = 1/4 (b^2 - a^2)$. Distingem trei cazuri:

1) $E \neq F$. Atunci $\mathfrak{M}$ este mediatoarea segmentului $| EF |$.
2) $E = F$ şi $a \neq b$ şi atunci $\mathfrak{M} = \emptyset$.
3) $E = F$, $a = b$. În acest caz: $\mathfrak{M} = \mathcal{P}$.

Scanned with OKEN Scanner

96. Fie $\{O\} = e \cap f \cap d$ (fig. II, 10). Să notăm:
$a = \| BC \|$, $b = \| AC \|$, $c = \| AB \|$, $x = \| AE \|$, $y = \| CD \|$, $z = \| BF \|$.
Atunci: $x^2 + y^2 + z^2 = (a - y)^2 + (b - x)^2 + (c - z)^2$.
De unde: $(ab/(b + c))^2 + (ab/(c + a))^2 + (ca/(a + b))^2 = (ca/(b + c))^2 + (ab/(c + a))^2 + (bc/(a + b))^2$, sau:

$$\frac{a^2(b - c)}{b + c} + \frac{b^2(c - a)}{c + a} + \frac{c^2(a - b)}{a + b} = 0.$$

De unde obținem:

$$(b - c)\,(a - c)\,(a - b)\,(a + b + c)^2 = 0.$$

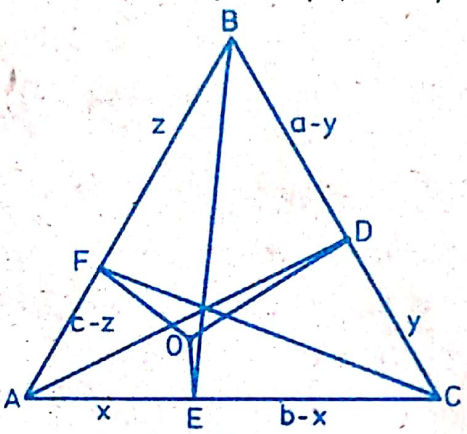


Fig. II, 10

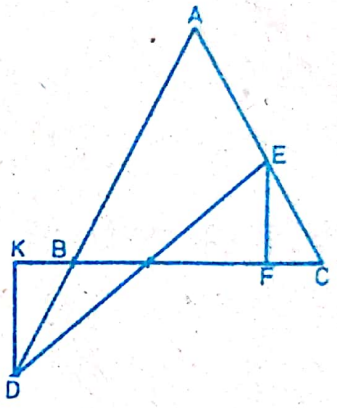


Fig. II, 11

97. Considerăm triunghiul isoscel ABC, $|AB| \equiv |AC|$, și triunghiul ADE astfel încît $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAE})$ și $\| AB \| + \| AC \| = \| AD \| + \| AE \|$ (1) (fig. II, 11). Din (1) rezultă $\| BD \| = \| EC \|$. Fie K și F picioarele perpendicularelor din D, respectiv E pe dreapta BC. Atunci $\triangle BDK \equiv \triangle CEF$. De aici: $|BK| \equiv |CF|$, și deci $|KF| \equiv |BC|$. Dar $|KF| = \mathrm{pr}_{BC} |DE|$, deci: $\| KF \| < \| DE \|$, adică $\| BC \| < \| DE \|$ (2). Din (1), (2) $\| AB \| + \| AC \| + \| BC \| < \| AD \| + \| AE \| + \| DE \|$, deci perimetrul triunghiului isoscel realizează minimul mulțimii N.

98. Fie $\| AB \| = c$, $\| BC \| = a$, $\| CA \| = b$ $(a = 1,\ b = \sqrt{3},\ c = \sqrt{2})$; fie D punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\hat{A}$ cu $|BC|$. Fie $m = \| BD \|$, $n = \| CD \|$. Atunci $m = \frac{ac}{b + c}$, $n = \frac{ab}{c + b}$. Înlocuind, rezultă.

99. Folosim teorema bisectoarei și teorema lui *Pitagora*.

100. CNP, PFB sînt asemenea (fig. II, 12); atunci: $\| FP \| = ac/b$, și: $\| PB \| = \frac{c}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$. $MDFP$ fiind dreptunghi: $\| MD \| = ac/b$ (1). Atunci:

$$\| CB \| = \| CP \| + \| PB \| =$$

$$= \left(\frac{c}{b} + 1\right)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

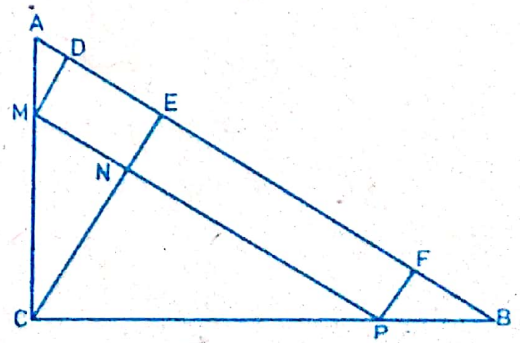


Fig. II, 12

Din: $\|CB\|^2 = \|EB\| \cdot \|AB\|$, avem: $\|AB\| = (b+c)(a^2+b^2)/b^2$. Atunci: $\|AE\| = \|AB\| - \|EB\| = (a^2/b^2)(b+c)$. Din $\|CP\|^2 = \|MP\| \cdot \|NP\|$, rezultă: $\|PM\| = (a^2+b^2)/b$. Atunci: $\|MN\| = \|MP\| - \|NP\| = a^2/b$, $\|DE\| = a^2/b$, $\|AD\| = \|AE\| - \|DE\| = \frac{a^2c}{b^2}$, deci: $\|AD\| = \frac{a^2c}{b^2}$ (2). Folosind (1), (2), rezultă concluzia.

(prelucrare după **D. Mîrzan**, G.M.-B 2/1974).

102. Notăm $\|AB\| = \|AC\| = b$, $\|BC\| = a$; avem $\|BB'\| = b/2$ (1). Cum BHA', $B'BC$ sînt asemenea, $\|BH\| = a^2/b$ (2). Deoarece AHB' și $AA'C$ sînt asemenea, și din (1), (2) rezultă: $\|AH\| = \frac{2b}{a}\left(1/2\, b - \frac{a^2}{b}\right)$ (3). Analog $BB'C$, $AA'C$ fiind asemenea avem: $\|AA'\| = \frac{b^2}{2a}$ (4). Din (3), (4) rezultă relația din enunț.

(I. Trifon, G.M.-B 2/1974).

103. Se folosesc asemănări și teorema lui *Pitagora*.

(M. Chiliman, G.M.-B 2/1974).

104. Fie $\{P\} = HE \cap BC$. Avem: $\frac{\|PB\|}{\|PC\|} \cdot \frac{\|EC\|}{\|EA\|} \cdot \frac{\|HA\|}{\|HB\|} = 1$, conform teoremei lui *Menelaus*. Din teorema bisectoarei:

$$\frac{\|EC\|}{\|EA\|} = \frac{\|MC\|}{\|MA\|} \text{ și } \frac{\|HA\|}{\|HB\|} = \frac{\|MA\|}{\|MB\|}.$$

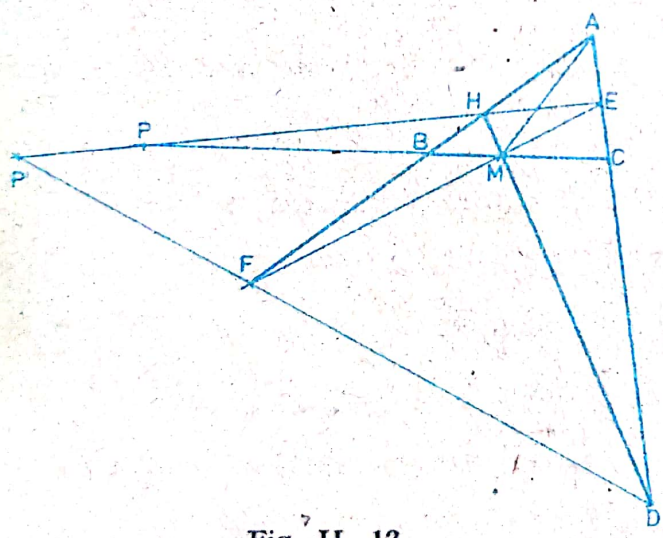


Fig. II, 13

Atunci: $\frac{\|PB\|}{\|PC\|} = \frac{\|MB\|}{\|MC\|}$, deci P este conjugatul armonic al lui M în raport cu B și C. Fie $\{P'\} = FD \cap BC$; analog, P' este conjugatul armonic al lui M față de B și C. Rezultă $P = P'$ deci $P \in BC \setminus [BC]$. Reciproc, fie M punctul armonic conjugat cu P față de B și C. Rezultă din teorema bisectoarei și reciproca teoremei lui *Menelaus* că P, H, E sînt coliniare și P, F, D sînt coliniare. Deci locul geometric căutat este $BC \setminus [BC]$ (fig. II, 13).

105. Din $\frac{\|BG\|}{\|GN\|} = \frac{\|CG\|}{\|GM\|}$ și $\widehat{BGC} \equiv \widehat{NGM}$ rezultă $\widehat{BCG} \equiv \widehat{NGM}$ deci: $\widehat{GBC} \equiv \widehat{GNM}$ (ceea ce implică $MN \parallel BC$) și $\frac{\|BC\|}{\|MN\|} = 2$. Din $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ obținem $\frac{\|AM\|}{\|AB\|} = \frac{\|AN\|}{\|AC\|} = \frac{\|MN\|}{\|BC\|} = 1/2$.

Scanned with OKEN Scanner

106. Tratăm cazul $M \in |AB|$, $N \in |AC|$, celelalte cazuri tratîndu-se similar. Triunghiurile MBP şi NQC sînt congruente, prin urmare: $|BP| \equiv |QC|$; din axioma lui *Pasch* rezultă $P, Q \in |BC|$, deci avem ordonarea $B-P-F-Q-C$ sau ordonarea $B-Q-F-P-C$; cum $|PF| \equiv |FQ|$, rezultă $|BF| \equiv |FC|$. Fie L' intersecţia medianei AF cu MN. Atunci din $\frac{\|ML'\|}{\|BF\|} = \frac{\|AL'\|}{\|AF\|} = \frac{\|L'N\|}{\|FC\|}$ şi $\|BF\| = \|FC\|$ obţinem $\|ML'\| = \|L'N\|$, şi deci $L = L'$. Prin urmare A, L, F sînt coliniare. Analog MNE are proprietatea că mediana EL trece prin mijlocul F al lui $|PQ|$.

107. Fie $\|MN\| = x$, $\|MP\| = y$; din $x/h_c = \frac{\|BM\|}{\|BC\|}$, $y/h_b = \frac{\|MC\|}{\|BC\|}$ urmează că: $x/h_c + y/h_b = 1$. Să presupunem că $h_c \leqslant h_b$, deci $\min(h_b, h_c) = h_c$, $\max(h_b, h_c) = h_b$; atunci $1 = \frac{x}{h_c} + \frac{y}{h_b} \leqslant \frac{x}{h_c} + \frac{y}{h_c}$ deci $1 = x/h_c + y/h_b \geqslant x/h_b + y/h_b$ deci $h_b \geqslant x + y$. Analog tratăm cazul $h_c \geqslant h_b$.

109. Fie $C'' \in |AB|$ astfel încît $|AC'| \equiv |BC''|$. Avem: $\frac{\|C''B\|}{\|C''A\|} = \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = \frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} = \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|}$ de unde rezultă că: $A'C'' \| AC$ şi $B'C'' \| BC$. Notăm cu O mijlocul lui $|A'B'|$. Atunci $CB'C''A'$ este paralelogram, deci mijlocul O al diagonalei $|A'B'|$ este în acelaşi timp mijlocul diagonalei $|CC''|$. Relaţiile $|OA| \equiv |OE|$ şi $|OC| \equiv |OC''|$ implică faptul că $ACEC''$ este paralelogram deci $CE \| AB$ şi $|CE| \equiv |AC''|$. Dar $|AC''| \equiv |BC'|$ deci $|EC| \equiv |BC'|$. Rezultă că $CC'BE$ este paralelogram, deci mijlocul D al diagonalei $|BC|$ aparţine diagonalei $|EC'|$.

110. Din teorema bisectoarei avem $\frac{\|AE\|}{\|EC\|} = \frac{\|AD\|}{\|DC\|}$, $\frac{\|AF\|}{\|FB\|} = \frac{\|AD\|}{\|BD\|}$. Deci $\frac{\|DB\|}{\|DC\|} \cdot \frac{\|EC\|}{\|EA\|} \cdot \frac{\|FA\|}{\|FB\|} = \frac{\|DB\|}{\|DC\|} \cdot \frac{\|DC\|}{\|DA\|} \cdot \frac{\|DA\|}{\|DB\|} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui *Ceva* rezultă că BE, CF şi AD sînt concurente, adică punctul P de intersecţie a dreptelor BE şi CF aparţine dreptei AD.

111. În triunghiurile dreptunghice $AA'M$ şi $AA'N$ avem:

$$\|MO\| = \frac{\|AA'\|}{2}, \quad \|NO\| = \frac{\|AA'\|}{2}, \quad \text{deci } |MO| \equiv |NO|.$$

Unghiul $\widehat{NOA'}$ este exterior triunghiului isoscel AON iar $\widehat{MOA'}$ este exterior triunghiului isoscel AOM de unde rezultă:

$$m(\widehat{NOM}) = m(\widehat{NOA'}) + m(\widehat{MOA'}) = 2m(\widehat{NAO}) + 2m(\widehat{MAO}) = 2m(\widehat{MAN}) = 2 \cdot 30 = 60.$$

Scanned with OKEN Scanner

112. Notăm cu E, respectiv F, mijloacele segmentelor $|AC|$, respectiv $|BD|$. Din teorema medianei rezultă că:

$$\|MA\|^2 + \|MC\|^2 = 2\|ME\|^2 + 1/2\|AC\|^2 \text{ și}$$

$$\|MB\|^2 + \|MD\|^2 = 2\|MF\|^2 + 1/2\|BD\|^2.$$

Aşadar egalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$$2\|ME\|^2 + 1/2\|AC\|^2 = 2\|MF\|^2 + 1/2\|BD\|^2, \text{ sau mai departe:}$$

$$\|ME\|^2 - \|MF\|^2 = 1/4\,(\|BD\|^2 - \|AC\|^2) = \text{constant}.$$

Distingem următoarele cazuri:

1) $E \neq F$ şi atunci mulţimea este o dreaptă perpendiculară pe $[EF]$.

2) $E = F$ şi $|BD| \equiv |AC|$, şi atunci mulţimea este tot planul $\mathcal{P}$.

3) $E = F$ şi $\|BD\| \neq \|AC\|$, şi atunci mulţimea este vidă.

Cazul 1) are loc dacă patrulaterul $ABCD$ nu este paralelogram. În cazul 2) patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi. În cazul 3), $ABCD$ este paralelogram dar nu este dreptunghi.

113. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $\|AD\| + \|BC\| > \|AB\| + \|AC\|$, sau mai departe cu $(\|AD\| + \|BC\|)^2 > (\|AB\| + \|AC\|)^2$; deoarece $\|AB\|^2 + \|AC\|^2 = \|BC\|^2$ şi $\|AB\| \cdot \|AC\| = \|BC\| \cdot \|AD\|$, aceasta devine $\|AD\|^2 > 0$.

114. Vom arăta că singurele patrulatere cu proprietatea din enunţ sînt trapezele dreptunghice ortodiagonale. 1) Căutăm o asemănare convenabilă între triunghiurile AOB şi COA. Aceasta este: $\triangle AOB \sim \triangle BOC$. Într-adevăr unghiul $\widehat{AOB}$ este în mod necesar congruent cu $\widehat{BOC}$ deoarece este exterior triunghiului BOC. Deci $AC \perp BD$. Unghiul $\widehat{OAB}$ trebuie să fie congruent cu $\widehat{OBC}$, căci dacă $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OCB}$, atunci BD este axă de simetrie şi nu ar exista numai trei triunghiuri asemenea. 2) Analog, dintre asemănările posibile între triunghiurile BOC şi COD singura care convine este $\triangle BOC \sim \triangle COD$. Rezultă perpendicularitatea diagonalelor şi $\hat{B} \in 90°$, $\hat{C} \in 90°$.

(A. Ghioca, G.M. 12/1980)

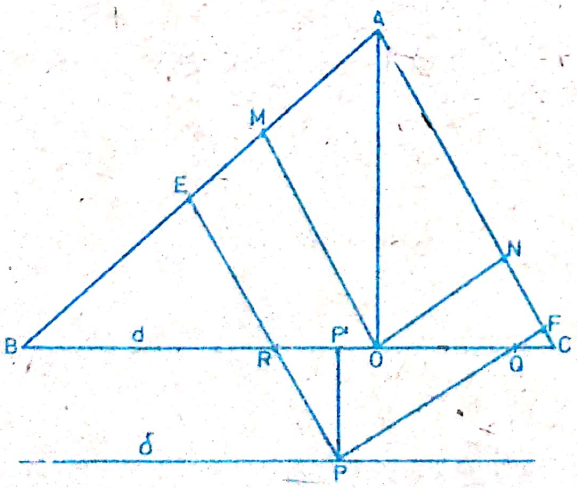


Fig. II, 14

115. Intersecţia paralelei prin E la MO cu paralela prin F la NO este cel de-al patrulea vîrf al paralelogramului care are trei dintre vîrfuri în punctele A, E, F; fie P acest punct (fig. II, 14). Cum $M \in |AE|$ şi $N \in |AF|$ rezultă că $O \in \text{Int } AEPF$ şi cum $O \in d$, deducem că dreapta d taie paralelogramul $AEPF$ în două puncte. Dar $d \cap |AE| = \emptyset$ şi $d \cap |AN| = \emptyset$; rezultă $d \cap |PE| \neq \emptyset$ şi $d \cap |PF| \neq \emptyset$ şi să notăm: $d \cap |PE| = \{R\}$, $d \cap |PF| = \{Q\}$. Rezultă imediat că $R \in |OB|$

iar $Q \in |OC|$ şi cum $O \in |BC|$, rezultă că pe dreapta d avem ordonarea $B-R-O-Q-C$. Cum P, E sînt separate de dreapta d, iar A, E sînt de aceeaşi parte a dreptei d, rezultă că A, P sînt separate de dreapta d, deci P este în semiplanul opus lui $|dA$. Evident $\triangle PRQ \sim \triangle ACB$ şi să determinăm raportul de asemănare. Avem $\frac{\|RO\|}{\|RB\|} = \frac{\|QO\|}{\|QC\|} = k$, de unde $\frac{\|RO\| + \|OQ\|}{\|RB\| + \|QC\|} = k$ de unde $\frac{\|RQ\|}{\|BC\| - \|RQ\|} = k$, şi în final: $\frac{\|BC\|}{\|RQ\|} = \frac{1+k}{k}$. Notînd $P' = \mathrm{pr}_d P$ rezultă $\frac{\|PP'\|}{\|AO\|} = \frac{k}{k+1}$, deoarece raportul lungimilor înălţimilor în două triunghiuri asemenea este egal cu raportul lor de asemănare. De aici: $\|PP'\| = \frac{k}{k+1}\|AO\| = \text{constant}$. Rezultă că P aparţine unei drepte δ, paralelă cu d, situată în semiplanul opus lui $|dA$ la distanţa $\frac{k}{k+1}\|AO\|$ de dreapta d. Reciproc, fie $P \in \delta$, şi fie R situat pe d astfel încît dreptele PR şi AO să nu fie paralele, iar intersecţia lor să fie un punct situat în semiplanul opus lui $|dA$; de asemenea îl alegem pe R astfel ca $\mathrm{m}(\widehat{RAO}) > \mathrm{m}(\widehat{P'PO})$. Fie punctul $B \in d$, $R \in |OB|$, astfel încît $\frac{\|RO\|}{\|RB\|} = k$. Conform axiomei *Pasch*, aplicată dreptei PR şi triunghiului AOB, rezultă $PR \cap |AB| \neq \emptyset$, şi fie atunci: $\{E\} = PR \cap |AB|$. Fie F al patrulea vîrf al paralelogramului care are două din laturi $|AE|$ şi $|EP|$ şi să notăm: $PF \cap d = \{Q\}$. Această intersecţie există deoarece $PF \parallel AB$, iar $AB \cap d \neq \emptyset$. Fie $AF \cap d = \{C\}$. Avem: $\mathrm{m}(\widehat{P'PQ}) = \mathrm{m}(\widehat{OAB}) > \mathrm{m}(\widehat{OAR}) > \mathrm{m}(\widehat{P'PO})$ ceea ce arată că $|PO \subset \mathrm{Int}\,\widehat{P'PQ}$, deci $O \in |P'Q|$. Axioma *Pasch* pentru dreapta PQ şi triunghiul AOC dă $Q \in |OC|$, $F \in |AC|$. Fie $M \in |AE|$ şi $N \in |AF|$ astfel ca $AF \parallel OM$ şi $AE \parallel ON$. Avem $M, N \in |dA$ şi $AMON$ paralelogram. De asemenea $\frac{\|EM\|}{\|EB\|} = \frac{\|RO\|}{\|BR\|} = k$. Rămîne să mai arătăm că $\frac{\|FN\|}{\|FC\|} = \frac{\|OQ\|}{\|QC\|} = k$. Să notăm $\frac{\|OQ\|}{\|QC\|} = p$, $\frac{\|RO\|}{\|OQ\|} = x$. Evident $\triangle RPQ \sim \triangle CAB$, deci $\frac{\|BC\|}{\|RQ\|} = \frac{\|AO\|}{\|PP'\|} = \frac{k+1}{k}$, de unde $\frac{\|BR\| + \|RO\| + \|OQ\| + \|QC\|}{\|RO\| + \|OQ\|} = \frac{k+1}{k}$ sau:

$$\frac{\frac{x}{k} + x + 1 + \frac{1}{p}}{x+1} = \frac{k+1}{k}$$

de unde $p = k$, deci $\frac{\|OQ\|}{\|QC\|} = k$ şi atunci $\frac{\|FN\|}{\|FC\|} = k$. Prin urmare orice punct al lui δ aparţine locului geometric.

(A. Ghioca, G.M. 7/1982).

Scanned with OKEN Scanner

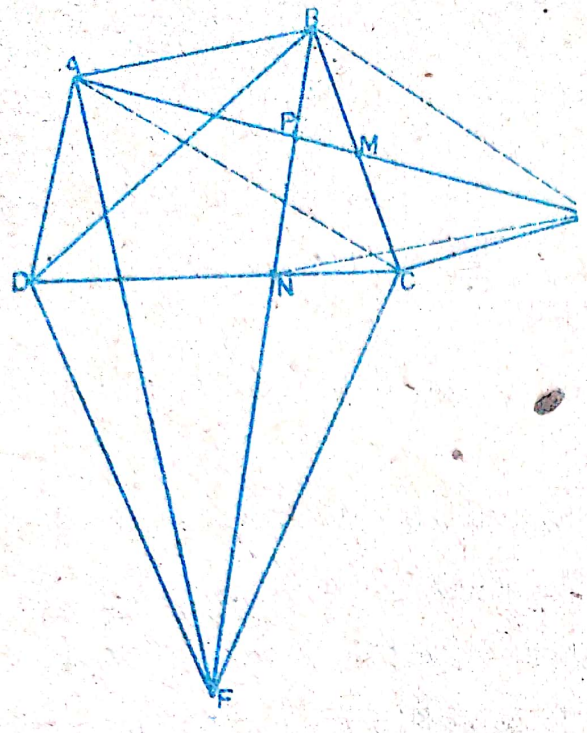


Fig. II, 15

116. 1) Este imediat că $P \in \text{Int}\, ABCD$. Prelungim segmentul $|AM|$ cu un segment $|ME| \equiv |AM|$ (fig. II, 15). Patrulaterul $ACEB$ fiind paralelogram rezultă că $CE \parallel AB$. Avem atunci:

$$\frac{\|AP\|}{\|AM\|} = k, \text{ de unde:}$$

$$\frac{\|AP\|}{\|AP\| + \|PM\|} = \frac{k}{k+1}, \text{ sau:}$$

$$\frac{\|AP\|}{\|AM\|} = \frac{k}{k+1}.$$

Urmează că:

$$\|PE\| = \|PM\| + \|ME\| =$$

$$= \frac{\|AP\|}{k} + \|AM\| = \frac{\|AP\|}{k} +$$

$$+ \frac{(k+1)\|AP\|}{k} = \frac{k+2}{k}\|AP\|.$$

Atunci $\frac{\|AP\|}{\|PE\|} = \frac{k}{k+2}$; adăugînd că: $\frac{\|PB\|}{\|PN\|} = \frac{k}{k+2}$ rezultă că: $\frac{\|AP\|}{\|PE\|} = \frac{\|PB\|}{\|PN\|}$ deci că $NE \parallel AB$. Cum $EN \parallel AB, EC \parallel AB$, rezultă că punctele E, C, N sînt coliniare deci $CD \parallel AB$. Prin urmare patrulaterul $ABCD$ este trapez. 2) Fie punctul F astfel ca N să fie mijlocul segmentului BF. Avem: $\frac{\|PB\|}{\|PN\|} = \frac{k}{k+2}$, de unde $\frac{\|PB\|}{\|PN\| + \|PB\|} = \frac{k}{2k+2}$, deci $\frac{\|PB\|}{\|BN\|} = \frac{k}{2k+2}$. Deci $\|PF\| = \|PN\| + \|NF\| = \|PN\| + \|BN\| =$

$$= \frac{(k+2)\|PB\|}{k} + \frac{(2k+2)\|PB\|}{k} = \frac{(3k+4)\|PB\|}{k}.$$

Rezultă că: $\frac{\|PB\|}{\|PF\|} = \frac{k}{3k+4}$. Patrulaterul $BDFC$ fiind paralelogram rezultă că $DF \parallel BC$. Pentru ca $ABCD$ să fie paralelogram trebuie ca $AD \parallel BC$, deci ca $AF \parallel BC$ de unde:

$$\frac{\|PB\|}{\|PF\|} = \frac{\|PM\|}{\|PA\|} \text{ sau } \frac{k}{3k+4} = \frac{1}{k} \text{ cu soluția } k = 4.$$

(I. Buzatu, G.M. 10/1978).

117. Fie $\{M\} = |A_1A_4| \cap |A_2A_5|$, $\{N\} = |A_1A_4| \cap |A_3A_6|$ și $\{P\} = |A_2A_5| \cap |A_3A_6|$. 1) Presupunem că punctele M, N, P determină un triunghi MNP. Să observăm că $MNP \subset \text{Int}\, A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Într-adevăr în patrulaterul convex $A_1A_2A_4A_5$ avem $M \in \text{Int}\, A_1A_2A_4A_5$,

astfel încît rezultă $M \in \text{Int}\, A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Analog pentru N și P. În triunghiul MNP cel puțin unul dintre unghiuri are măsura $\geqslant 60$, astfel încît putem presupune că $m(\widehat{M}) \geqslant 60$, pentru fixarea ideilor. Fie A un punct astfel încît $A_1A_2AA_4$ este un paralelogram. Este clar că A este de aceeași parte a lui A_1A_2 în care se găsește hexagonul. Să presupunem că $\| A_1A_4 \| \geqslant 2$, și $\| A_2A_5 \| \geqslant 2$. Atunci rezultă $\| A_2A \| = \| A_1A_4 \| \geqslant 2$, $\| AA_5 \| \leqslant \| AA_4 \| + \| A_4A_5 \| = \| A_1A_2 \| + \| A_4A_5 \| \leqslant 1 + 1 = 2$. Din faptul că $A_2A \parallel MA_4$ rezultă că $m(\widehat{A_5A_2A}) \geqslant 60$ și atunci cel puțin unul dintre unghiurile $\widehat{A_2A_5A}$, $\widehat{A_2AA_5}$ va avea măsura cel mult 60. Rezultă că cel puțin una din laturile $[A_2A_5]$ și $[A_2A]$ are lungimea mai mică sau cel mult egală cu lungimea laturii $[AA_5]$, care ne conduce la o contradicție, deci trebuie să avem sau $\| A_1A_4 \| \leqslant 2$, sau $\| A_2A_5 \| \leqslant 2$. 2) În cazul în care cele trei diagonale $[A_1A_4]$, $[A_2A_5]$, $[A_3A_6]$ sînt concurente în M se obțin șase unghiuri în jurul punctului M dintre care cel puțin unul are măsura $\geqslant 60$. În continuare se repetă raționamentul de mai sus.

(M. Cavachi, The American Math. Monthly 5/1980).

118. Se arată că pentru K fixat pe $[IJ]$ există un punct P pe $[AD]$ și altul Q pe $[BC]$ astfel că punctul K este mijlocul lui $[PQ]$. Analog există R pe $[AB]$ și S pe $[CD]$ astfel ca punctul K să fie mijlocul lui $[RS]$.

(S. Ianuș, G.M. 7/1982).

119. Pentagonul $ABCDE$ fiind convex avem $C, D \in \text{Int}\, \widehat{BAE}$ și alte apartenențe analoage, deci diagonalele sînt interioare unghiurilor din care „pleacă" și intersecțiile acestora sînt puncte interioare pentagonului. Fie M, N, P, Q, R intersecțiile diagonalelor ca în figura II, 16. Datorită congruenței laturilor pentagonului se formează mai multe triunghiuri isoscele. Pentru simplitate, ținînd cont că la unghiuri congruente corespund măsuri egale, notăm cu $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\eta}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}, \hat{9}, \widehat{10}$ măsurile unghiurilor ca în figură. De asemenea pentru regularitate vom nota cu $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$ măsurile unghiurilor pentagonului. Avem:

1) Din triunghiurile AQC și EQD avem $\hat{\alpha} + \hat{\delta} = \hat{3} + \hat{5}$, iar din $\hat{A} \geqslant \hat{C}$ rezultă $\hat{\alpha} + \hat{5} \geqslant \hat{\delta} + \hat{3}$. Scăzînd din a doua relație pe prima, iar apoi adunînd cele două relații, obținem respectiv: (1) $\hat{5} \geqslant \hat{\delta}$, $\hat{\alpha} \geqslant \hat{3}$.

2) Din triunghiurile BRD și ARE avem $\hat{\beta} + \hat{\gamma} = \hat{4} + \hat{5}$, iar din $\hat{B} \geqslant \hat{D}$ rezultă $\hat{4} + \hat{\beta} \geqslant \hat{5} + \hat{\gamma}$. Prin scăderea, respectiv adunarea celor două relații obținem: (2) $\hat{4} \geqslant \hat{\gamma}$, $\hat{\beta} \geqslant \hat{5}$.

3). Din triunghiurile BMA și MEC avem $\hat{\delta} + \hat{\eta} = \hat{1} + \hat{4}$, iar din $\hat{C} \geqslant \hat{E}$ rezultă $\hat{1} + \hat{\delta} \geqslant \hat{\eta} + \hat{4}$. Rezultă că: (3) $\hat{1} \geqslant \hat{\eta}$, $\hat{\delta} \geqslant \hat{4}$.

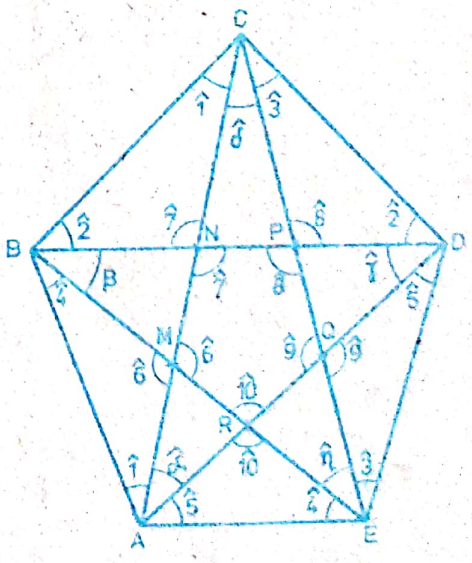


Fig. II, 16

4) Din triunghiurile BPE și CPD avem $\hat{\eta} + \hat{\beta} = \hat{2} + \hat{3}$, iar din $\hat{B} \geq \hat{E}$ rezultă $\hat{2} + \hat{\beta} \geq \hat{3} + \hat{\eta}$. Obținem: (4) $\hat{2} \geq \hat{\eta}$, $\hat{\beta} \geq \hat{3}$.

5). Din triunghiurile AND și BNC avem $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = \hat{1} + \hat{2}$, iar din $\hat{A} \geq \hat{D}$ avem $\hat{1} + \hat{\alpha} \geq \hat{2} + \hat{\gamma}$, de unde obținem: (5) $\hat{1} \geq \hat{\gamma}$, $\hat{\alpha} \geq \hat{2}$.

6). Cum $A \geq B$, din triunghiurile isoscele EAB și ABC rezultă $\hat{4} \leq \hat{1}$; analog din $\hat{B} \leq \hat{C}$ obținem $\hat{1} \leq \hat{2}$, din $\hat{C} \geq \hat{D}$ obținem $\hat{2} \leq \hat{3}$ și din $\hat{D} \geq \hat{E}$ obținem $\hat{3} \leq \hat{5}$. Așadar avem: (6) $\hat{4} \leq \hat{1} \leq \hat{2} \leq \hat{3} \leq \hat{5}$.

7). Din triunghiurile isoscele EAB și ABC în care $\|EA\| = \|AB\| = \|BC\|$ și $\hat{A} \geq \hat{B}$, rezultă imediat că $\|BE\| \geq \|AC\|$. Analog $\|AC\| \geq \|BD\| \geq \|CE\| \geq \|AD\|$. Din triunghiul ACE în care $\|AC\| \geq \|CE\|$ rezultă $\hat{\eta} + \hat{4} \geq \hat{5} + \hat{\alpha}$ și ținînd cont de (6) rezultă în mod necesar (7) $\hat{\eta} \geq \hat{\alpha}$. Din triunghiul ACD în care $\|AC\| \geq \|AD\|$ rezultă $\hat{2} + \hat{\gamma} \geq \hat{3} + \hat{\delta}$ și din (6) deducem (8) $\hat{\gamma} \geq \hat{\delta}$. Din triunghiul BCE în care $\|BE\| \geq \|CE\|$ rezultă $\hat{1} + \hat{\delta} \geq \hat{2} + \hat{\beta}$ și din (6) rezultă: (9) $\hat{\delta} \geq \hat{\beta}$.

8). Din (3), (7), (1), (6) avem $\hat{1} \geq \hat{\eta} \geq \hat{\alpha} \geq \hat{3} \geq \hat{2} \geq \hat{1}$ deci (10) $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{\alpha} = \hat{\eta}$. Din (9), (2), (1) avem $\hat{\delta} \geq \hat{\beta} \geq \hat{5} \geq \hat{\delta}$ deci (11) $\hat{5} = \hat{\beta} = \hat{\delta}$. Din (2), (8), (3) avem $\hat{4} \geq \hat{\gamma} \geq \hat{\delta} \geq \hat{4}$ deci: (12) $\hat{4} = \hat{\delta} = \hat{\gamma}$.

Din (11), (12) rezultă $\hat{4} = \hat{5}$ și atunci din (6) rezultă: $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} = \hat{5}$, deci pentagonul este regulat.

(I.V. Maftei, Probl. discutată în juriul O.I.M. din S.U.A., 1981)

120. Fie S, P, Q respectiv mijloacele segmentelor din enunț. Fie de asemenea S_1 mijlocul segmentului $|A_3A_4|$, Q_1 mijlocul segmentului $|A_3A_6|$ și A_6' intersecția paralelei prin A_6 la A_0A_1 cu A_3A_4. Folosind formula ce dă lungimea segmentului ce unește mijloacele diagonalelor unui trapez, vom avea:

$$\|PQ_1\| = \frac{\|A_3A_4\| - \|A_5A_6\|}{2} = \frac{\|A_4A_6\|}{2} = \frac{\|A_5A_3\|}{2}; \quad \|QQ_1\| = \frac{\|A_3A_1\|}{2}$$

și $m(\widehat{QQ_1P}) = 120$. Pe de altă parte:

$$\|PS_1\| = 1/2\,\|A_3A_5\| \text{ și } \|SS_1\| = 1/2\,\|A_4A_2\| = 1/2\,\|A_3A_1\|$$

iar $m(\widehat{SS_1P}) = 120$, deci $\triangle PQ_1Q \equiv \triangle PS_1S$ de unde rezultă că $|PS| \equiv |PQ|$ și $m(\widehat{SPQ}) = m(\widehat{S_1PQ_1}) = 60$, deci triunghiul SPQ este echilateral.

(I. Hadîrcă, G.M. 10/1977)

122. Dacă dreptele a și b se intersectează, există o soluție unică. Dacă $a \parallel b$, atunci este posibil să nu existe nici o translație.

123. Rotația de centru M_1 transformă mijlocul S al segmentului $|AB|$ în mijlocul S_1 al segmentului $|A_1B_1|$. Rezultă că M_1 este situat pe mediatoarea segmentului $|SS_1|$. Analog M_2 este situat pe mediatoarea segmentului $|SS_1'|$.

Scanned with OKEN Scanner

124. 1) Imaginea triunghiului BEK prin translație este triunghiul DHP unde P este piciorul perpendicularei din D pe BD.

2) Din triunghiul dreptunghic KHP se deduce $\| BE \| = \sqrt{b^2 - a^2}$.

125. Se consideră o rotație de centru A și un unghi având măsura 60, astfel încît B se transformă în C. Dacă se notează cu P' transformatul lui P, rezultă ușor că triunghiul CPP' are laturile congruente cu $| AP |$, $| BP |$ respectiv $| CP |$.

126. Considerăm o rotație în jurul punctului B cu un unghi de măsură 90, care duce N în K. Fie A' și E' transformatele lui A, respectiv E. Se observă că $| BE' |$ este linie mijlocie în triunghiul $CA'K$. Dacă F este piciorul perpendicularei din B pe CK avem $\mathrm{m}(\widehat{FBE}) = 180$.

127. Compunînd rotațiile $\mathcal{R}(D, 90)$ și $\mathcal{R}(E, 270)$ obținem translația care duce pe A în C. Prin această translație punctul D se transformă în punctul F astfel încît $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$. Dar $\mathrm{m}(\widehat{FDE}) = 45$ și deci și unghiul căutat este de 45.

Capitolul III

CERCUL

1. Fie K și L mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[CD]$ respectiv. Perpendicularele în K și L pe AB și respectiv pe CD se intersectează în O.

Se arată că $\| OA \| = \| OB \| = \| OC \| = \| OD \|$.

2. Presupunem că $M \in \mathcal{C}(O, r)$. Atunci N se mișcă astfel încît dreapta MN trece prin punctul fix A și $\dfrac{\| MA \|}{\| AN \|} = K$, unde K este număr real strict pozitiv. Există un singur punct $O_1 \in OA$ astfel încît A să separe punctele O și O_1 și $\| O_1A \| = \dfrac{1}{K} \| OA \|$. Atunci $\triangle OMA \sim \triangle NO_1A$ de unde rezultă că $\| NO_1 \| = \dfrac{r}{K}$ și astfel N descrie un cerc $\mathcal{C}\left(O_1, \dfrac{r}{K}\right)$.

3. Notăm cu x lungimea laturii pătratului căutat, $\{E\} = O_1O_2 \cap AD$ și cu F punctul diametral opus lui O_1 în cercul $\mathcal{C}(O_2, r)$. Din triunghiul dreptunghic O_1AF avem $\| AE \|^2 = \| O_1E \| \, \| EF \|$. (*)

Dar $\| AE \| = \dfrac{x}{2}$, $\| O_1E \| = \dfrac{r - x}{2}$, $\| EF \| = \| O_1F \| - \| O_1E \| =$

$= 2r - \dfrac{r - x}{2} = \dfrac{3r + x}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Relația (*) devine $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{r-x}{2}\,\frac{3r+x}{2}$ sau $2x^2 + 2rx - 3r^2 = 0$.

Obținem $x = \frac{r(\sqrt{7}-1)}{2}$ (Fig. III, 1).

4. Dacă $\widehat{AED} \equiv \widehat{DEC}$ atunci $\widehat{CDE} \equiv \widehat{DEC}$ de unde $|CE| \equiv |CD|$. Rezultă că E este punctul de intersecție al laturii $[AB]$ cu cercul de centru C și rază $\|CD\|$. Problema are soluție dacă $\|AB\| \geqslant \|BC\|$.

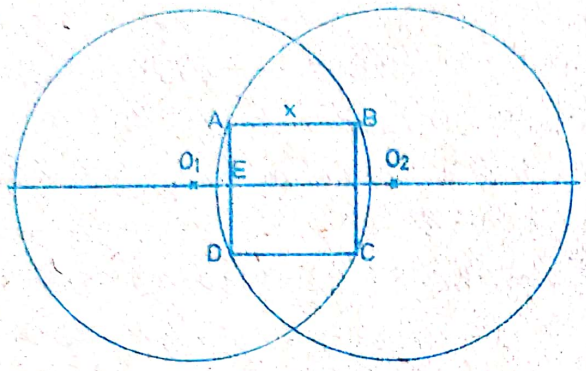


Fig. III, 1

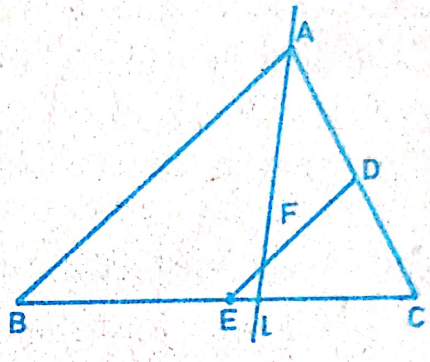


Fig. III, 2

5. Din faptul că $AB \parallel DE$ rezultă că l intersectează DE. Notăm $\{F\} = l \cap DE$ și rezultă că triunghiul ADF este isoscel. Construcția se face astfel (Fig. III, 2): Construim cercul cu centrul în D și de rază $\|DF\|$. Acest cerc intersectează dreapta l în punctele A și F. Diametrul ce trece prin A intersectează $\mathcal{C}(D, \|DF\|)$ în C. Ducem prin A o paralelă la ED și considerăm pe această paralelă punctul B astfel încît $\|AB\| = 2\|ED\|$, iar B și E să nu fie separate de dreapta AC.

6. Alegem punctele A și B pe linia poligonală astfel încît cele două linii poligonale de extremități A și B care se formează să aibă aceeași lungime $\frac{p}{2}$, p fiind perimetrul întregii linii poligonale. Fie O mijlocul segmentului $[AB]$. Considerăm cercul $\mathcal{C}\left(O, \frac{p}{4}\right)$ și demonstrăm că interiorul acestui cerc împreună cu cercul este discul căutat. Presupunem că există un punct M al liniei poligonale exterior cercului. Lungimea liniei poligonale de extremități A și B pe care se află M nu este mai mică decît $\|AM\| + \|MB\|$, adică $\|AM\| + \|MB\| \leqslant \frac{p}{2}$. Pe de altă parte din paralelogramul $AMBD$ avem $2\|MO\| = \|DM\| < \|BM\| + \|BD\| = \|AM\| + \|MB\|$. Deoarece $\|MO\| > \frac{p}{4}$, din inegalitatea $\|AM\| + \|MB\| > 2\|MO\|$ rezultă $\|AM\| + \|MB\| > \frac{p}{2}$. Contradicție.

7. Distingem trei cazuri pentru triunghiul ABM: 1) $|AB| \equiv |AM|$, 2) $|AB| \equiv |BM|$, 3) $|AM| \equiv |BM|$. În primul caz $M \in \mathcal{C}(A, \|AB\|)$, iar în al doilea caz $M \in \mathcal{C}(B, \|AB\|)$. În al treilea caz M se află pe media-

toarea laturii $[AB]$. Triunghiul ACM va fi isoscel dacă $M \cup \mathcal{C}(A, \| AC \|)$ sau $M \in \mathcal{C}(C, \| AC \|)$ sau M se află pe mediatoarea laturii $[AC]$. Mulțimea căutată este $\mathcal{C}(A, \| AB \|) \cup \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ (fig. III, 3). Dacă $M = B$ sau $M = C$ atunci unul din triunghiurile ABM, ACM este degenerat. Analog, cînd $M = C_1$ sau $M = B_1$ și cînd $M = M_5$ sau $M = M_6$.

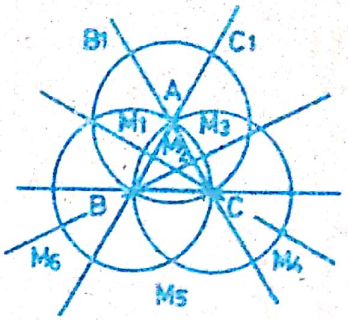


Fig. III, 3

8. 1) Dreapta MN fiind linie mijlocie în triunghiul AHB este paralelă cu AB și deci și cu EF (fig. III, 4). Analog MP este paralelă cu DE și deci patrulaterul $MNEP$ este paralelogram. La fel se arată că $MNPF$ este paralelogram. Rezultă că $|EP| = |MN|$, $|PF| = |MN|$ adică $\| MN \| = \frac{1}{2} \| FE \|$. Dar $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul AHB și deci $\| MN \| = \frac{1}{2} \| AB \|$. Prin urmare $|FE| = |AB|$. Analog se arată că $|ED| = |AC|$ și $|DF| = |BC|$ adică $\triangle ABC = \triangle DEF$. 2) Deoarece $DMPN$ și $MNPF$ sînt paralelograme avem că $|DM| = |NP| = |MF|$, adică M este mijlocul laturii $[DF]$. Analog punctele N și P sînt mijloacele laturilor $[DE]$ și $[FE]$. Rezultă că AA_1, BB_1 și CC_1 sînt perpendicularele duse pe laturile triunghiului DEF prin mijloacele M, N, P ale acestor laturi. Aceasta înseamnă că H este centrul cercului circumscris triunghiului DEF.

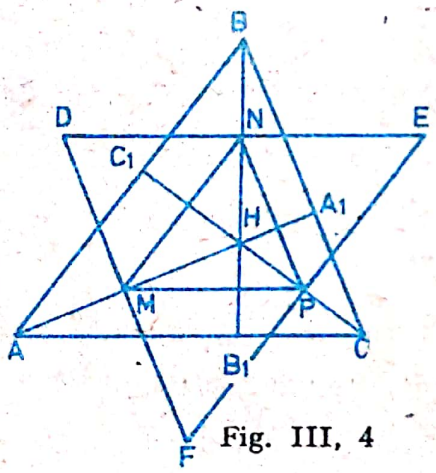


Fig. III, 4

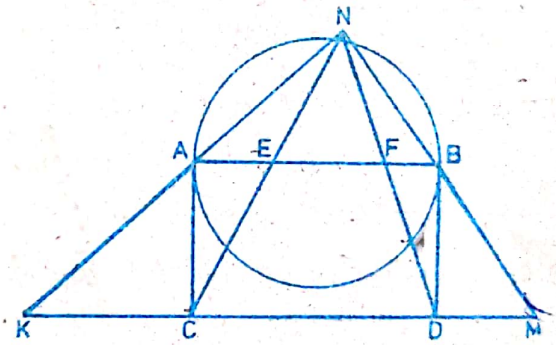


Fig. III, 5

9. Notăm $\{K\} = AN \cap CD$ și $\{M\} = BN \cap CD$ (fig. III, 5). Avem relațiile $\| AB \|^2 = 2 \| AC \|^2$ (1) și

$$\frac{\| KC \|}{\| AE \|} = \frac{\| CD \|}{\| EF \|} = \frac{\| DM \|}{\| FB \|} \quad (2).$$

Din asemănarea triunghiurilor AKC și BDM deducem

$$\frac{\| KC \|}{\| BD \|} = \frac{\| AC \|}{\| DM \|} \quad (3).$$

Dar $|BD| = |AC|$ și deci $2 \| KC \| \cdot \| DM \| = 2 \| AC \|^2 = \| AB \|^2 = \| CD \|^2$. (4)
Substituind în (4) lungimile $\| KC \|$, $\| DM \|$ și $\| CD \|$ cu lungimile proporționale din (2) obținem $2 \| AE \| \cdot \| BF \| = \| EF \|^2$ (5).

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\|AF\| + \|BE\| = \|AB\| + \|EF\|$ rezultă că $\|AF\|^2 + \|BE\|^2 + 2\|AF\| \cdot \|BE\| = \|AB\|^2 + \|EF\|^2 + 2\|AB\| \cdot \|EF\| = \|AB\|^2 + 2\|AE\| \cdot \|BF\| + 2\|AB\| \cdot \|EF\| = \|AB\|^2 + 2(\|AE\| \cdot \|BF\| + \|AB\| \cdot \|EF\|)$ de unde rezultă că $\|AF\|^2 + \|BE\|^2 = \|AB\|^2$.
Am ținut seama de relația $\|AF\| \cdot \|BE\| = \|AE\| \cdot \|BF\| + \|AB\| \cdot \|EF)\|$, care rezultă din $(\|AE\| + \|EF\|)(\|EF\| + \|FB\|) = \|AE\| \cdot \|BF\| + (\|AE\| + \|EF\| + \|FB\|) \cdot \|EF\|$.

12. Fie $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ cercul înscris pătratului avînd o latură situată pe latura $[AC]$ a triunghiului ABC. Evident AC este tangentă cercului $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$. Tangentele la $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ paralele cu AB și BC intersectează pe AC în A_1 și C_1, iar ele se mai intersectează în B_1. Se arată ușor că $A_1, C_1 \in |AC|$ și $B_1 \in \text{Int}\,\widehat{ABC}$. Avem $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ și deci $\frac{r_1}{r} = \frac{\|A_1C_1\|}{\|AC\|} < 1$, deci $r_1 < r$. Rezultă $a = 2r_1 < 2r$. Pentru cealaltă inegalitate se folosește o construcție analoagă considerînd cercul circumscris pătratului.

17. Fie E mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $[OE]$ este înălțime și mediană în triunghiul AOB și înălțime în triunghiul AOD, iar $[OC]$ este mediană în triunghiul $\widehat{AOD}$. Bisectoarea unghiului $\widehat{AOD}$ este situată între mediana și înălțimea triunghiului AOD așa încît $\widehat{AOC} < \widehat{COD}$.

18. *Soluția lui Arhimede.* Dacă am presupune $D \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O, r) \Rightarrow \Rightarrow m(\widehat{CDO}) = 180 - m(\widehat{ODB}) > 180 - m(\widehat{AOB}) > 180 - 90 = 90 \Rightarrow \Rightarrow \|OC\| > \|CD\| = \|OB\|$, contradicție. Rezultă $D \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r)$, deci B și C sînt de aceeași parte a dreptei AO. Unghiul $\widehat{AOB}$ este unghi exterior triunghiului OBD. Avem deci $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{OBD}) + m(\widehat{ODB})$ (1). Triunghiul OBC este isoscel și deci $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB})$ (2). Unghiul $\widehat{OCB}$ este unghi exterior triunghiului OCD și deci $m(\widehat{OCB}) = m(\widehat{COD}) + m(\widehat{ODC})$ (3). Triunghiul COD este isoscel, deoarece $|OC| \equiv |CD|$ și deci $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{ODC})$ (4). Din relațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă că $m(\widehat{AOB}) = 3m(\widehat{ADB})$.

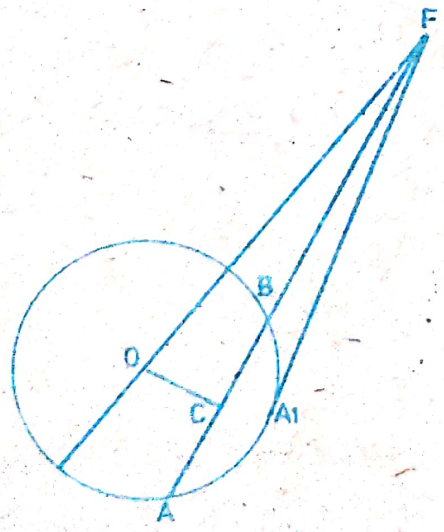


Fig. III, 6

34. Cazul 1). $F \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r)$. Fie A și B punctele de intersecție ale unei secante cu cercul (B între A și F). Notăm $c = \|AF\| + \|BF\|$ și vrem să găsim valoarea maximă și minimă a lui c. Fie C piciorul perpendicularei din O pe AB. Avem $\|AC\| = \|BC\| = \frac{\|AB\|}{2}$. Rezultă că $c = \|AC\| + \|CB\| + \|BF\| + \|BF\| = 2(\|BC\| + \|BF\|) = 2\|FC\|$. Considerînd triunghiul dreptunghic FCO observăm că lungimea segmentului $|FC|$ este maximă cînd secanta trece prin centrul cercului și minimă cînd secanta devine tangenta FA_1 (fig. III, 6).

Scanned with OKEN Scanner

Cazul 2). $F \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$. Fie $[A_1B_1]$ un diametru, $F \in [A_1B_1]$. Deoarece $\| A_1F \| + \| B_1F \| = \| A_1B_1 \|$, iar $\| AF \| + \| BF \| = \| AB \|$ și $| A_1B_1 | > | AB |$ rezultă că c este maxim cînd secanta trece prin centru. Mai departe c are valoare minimă cînd secanta este perpendiculara prin F pe diametrul $[A_1B_1]$.

Într-adevăr dacă C este piciorul perpendicularei din O pe AB, din triunghiul dreptunghic OCF avem $\| OF \| > \| OC \|$ deci $\| A_2B_2 \| < \| AB \|$. (fig. III, 7)

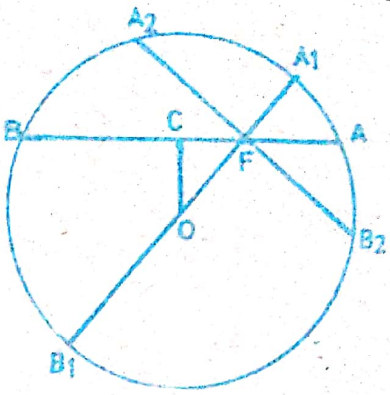


Fig. III, 7

Cazul 3). $F \in \mathcal{C}(O, r)$. În acest caz F este unul din punctele de intersecție ale secantei cu cercul. Se vede că c este maxim cînd secanta trece prin O și minim cînd secanta este tangenta la cerc în F.

36. Perpendicularele pe coarda $[CD]$ intersectează diametrul $[AB]$ în punctele E și F. Fie K piciorul perpendicularei din O pe CD. Atunci $|CK| \equiv |DK|$. Dreapta OK trece deci prin mijlocul K al laturii $[DC]$ a trapezului dreptunghic $CEFD$ și este paralelă cu laturile $[CE]$ și $[DF]$. Prin urmare $[OK]$ este linie mijlocie în trapez și O este mijlocul laturii $[EF]$, adică $|OE| \equiv |OF|$.

37. Fie $K \in |CD|$ astfel încît $OK \perp CD$. Atunci K este mijlocul coardei $[CD]$. Patrulaterul ABB_1A_1 este trapez dreptunghic iar $[OK]$ este paralelă cu bazele și trece prin mijlocul O al laturii $[AB]$.

$[OK]$ este astfel linie mijlocie în acest trapez și deci K este mijlocul laturii $[A_1B_1]$. Avem $\| A_1C \| = \| A_1K \| - \| CK \| = \| B_1K \| - \| DK \| = \| DB_1 \|$. (fig. III, 8)

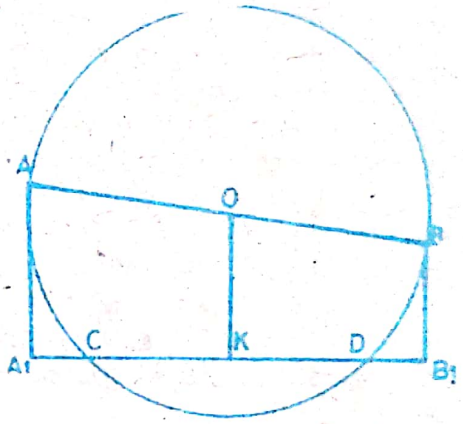


Fig. III, 8

38. Coardele $[AB]$ și $[A'B']$ fiind paralele rezultă că $\widehat{BCA'} \equiv \widehat{B'C'A}$. Coardele $[BC]$ și $[B'C']$ fiind congruente și arcele $\widehat{BC}$ și $\widehat{B'C'}$ sînt congruente. Din egalitățile $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COA'}) = m(\widehat{B'OC'}) + m(\widehat{C'OA})$ și $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{C'OA})$ deducem

$m(\widehat{COA'}) = m(\widehat{C'OA})$ adică $\widehat{CA'} \equiv \widehat{C'A}$. Prin urmare $|AC| \equiv |A'C'|$.

39. Fie O centrul cercurilor concentrice și O_1 centrul cercului care le intersectează. Notăm $\{M\} = CD \cap OO_1$ și $\{K\} = AB \cap OO_1$. Din congruența triunghiurilor COO_1 și DOO_1 rezultă că $|O_1O$ este bisectoare a unghiului $\widehat{CO_1D}$ și cum triunghiul CO_1D este isoscel rezultă $CD \perp OO_1$. Analog se arată că $AB \perp OO_1$. Deci $CD \parallel AB$.

40. Fie x raza cercului căutat, $OK \perp AB$, $OF \perp BC$, $KE \perp BC$, $OD \perp KE$. Din triunghiul dreptunghic AOK avem $x = \| AO \| = \sqrt{\| AK \|^2 + \| KO \|^2}$, $\| AK \| = \dfrac{\| AB \|}{2} = \dfrac{a}{2}$ unde $\| AB \| = a$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\triangle OKD \sim \triangle KBE$, deci $\frac{\| KO \|}{\| OD \|} = \frac{\| KB \|}{\| KE \|}$.

Dar $\| KB \| = \frac{a}{2}$ și dacă notăm $d = \| KE \|$ atunci $\| BE \| =$

$= \sqrt{\| KB \|^2 - \| KE \|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2}$ și $\| OD \| = \| EF \| = \| BF \| - \| BE \| =$

$= \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2}$, unde $b = \| BC \|$.

Deci $\| KO \| = \| OD \| \cdot \frac{\| KB \|}{\| KE \|} = \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2} \right) \cdot \frac{a}{2d}$.

În final obținem $x = \frac{a}{4d} \sqrt{a^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - 4d^2}}$.

43. Vom demonstra prin inducție după numărul n al coardelor că interiorul cercului este partiționat în $n + m + 1$ părți. Este clar că o coardă împarte un disc în două părți și în acest caz $m = 0$. Presupunem că pentru $n - 1$ coarde afirmația este adevărată și fie acum n coarde care se intersectează în m puncte interioare cercului. $n - 1$ coarde din cele n se intersectează în m_1 puncte și împart discul în $n + m_1$ părți conform ipotezei de inducție. A n-a coardă intersectează celelalte coarde în $m - m_1$ puncte. Aceste $m - m_1$ puncte împart a n-a coardă în $m - m_1 + 1$ părți, fiecare parte fiind frontiera a două părți ale discului partiționat de cele n coarde.
Astfel scoțînd o coardă, $2(m - m_1 + 1)$ părți ale discului se reunesc două cîte două formînd $m - m_1 + 1$ părți. Prin urmare numărul părților în care discul este secționat de n coarde este $(n + m_1) + (m - m_1 + 1) = n + m + 1$ părți.

44. Fie ABC un patrulater și fie M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și respectiv $[CD]$. Rotim patrulaterul $AMND$ în plan, în jurul punctului N cu un unghi de măsură 180. După rotație vîrful D coincide cu C iar M și A vor fi transformate în M' și A'. Punctele M, N, M' vor fi coliniare și $M'A' \| MB$, $M'A' \| MB$. De aceea patrulaterul $MBA'M'$ este paralelogram și $\| A'B \| = \| MM' \| = 2 \| MN \|$. Din ipoteză $\| BC \| + \| AD \| = 2 \| MN \|$, prin urmare $\| BC \| + \| CA' \| = \| A'B \|$. Rezultă că punctul C trebuie să se afle pe segmentul $[A'B]$ căci în caz contrar în triunghiul BCA' am avea $\| BC \| + \| CA' \| > \| A'B \|$. De aici rezultă că $BC \| MN \| AD$, adică $ABCD$ este trapez.

45. Fie E al doilea punct de intersecție al cercului de diametru $[BM]$ cu dreapta MN, iar D al doilea punct de intersecție al cercului de diametru $[CN]$ cu dreapta MN. Observăm că $ED \| BC$ și $\mathrm{m}(\widehat{MEB}) = \mathrm{m}(\widehat{NDC}) = 90$, deci patrulaterul $BCDE$ este dreptunghi. Din relațiile

$$\| EF \| \cdot \| FM \| = \| PF \| \cdot \| FQ \|, \quad \| NF \| \cdot \| FD \| = \| PF \| \cdot \| FQ \|$$

deducem:

$$\| EF \| \cdot \| FM \| = \| NF \| \cdot \| FD \| \qquad (1).$$

Notăm $a = \| BE \|$. Deoarece $m(\widehat{NBE}) = 45$ și $m(\widehat{MCD}) = 30$, avem $\| EF \| = \| EN \| + \| NF \| = a + \| NF \|$, $\| FD \| = \| FM \| + \| MD \| = \| FM \| + \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Relația (1) devine:

$$(a + \| NF \|) \| FM \| = \| NF \| \left(\| FM \| + \frac{a\sqrt{3}}{3} \right),$$

din care obținem $\frac{\| NF \|}{\| FM \|} = \sqrt{3}$ (fig. III, 9).

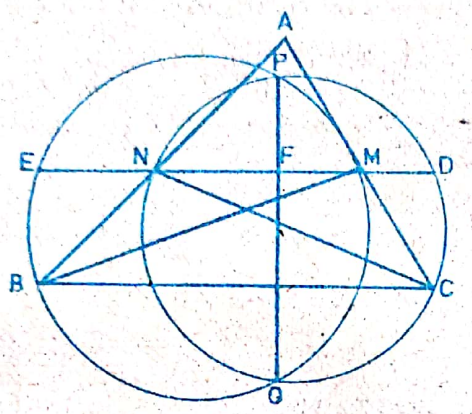


Fig. III, 9

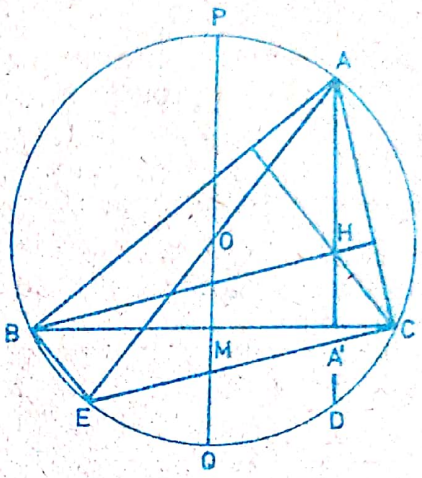


Fig. III, 10

46. Presupunem problema rezolvată. Notăm cu D intersecția dintre AA' și cercul circumscris, cu M mijlocul lui $[BC]$ iar cu E punctul diametral opus lui A (fig. III, 10). O este centrul cercului circumscris, $HBEC$ este paralelogram, de unde rezultă că M este mijlocul segmentului $[HE]$. Deci în triunghiul AEH, $[OM]$ este linie mijlocie.

Deducem construcția:

Din mijlocul M al segmentului $[BC]$ deducem perpendiculara MO astfel încît $\| MO \| = \frac{\| AH \|}{2}$. Trasăm cercul de centrul O și rază $\| OB \|$.

Punctul A se va afla la intersecția dintre cerc și o paralelă la BC situată la distanța $\| AA' \|$ de dreapta BC.

Pentru ca problema să aibă soluție este necesar și suficient ca $| AA' | < | MP |$ adică:

$$\| AA' \| < \| OM \| + \| OC \| \Leftrightarrow \| AA' \| < \frac{\| AH \|}{2} + \sqrt{\frac{\| AH \|^2}{4} + \frac{\| BC \|^2}{4}}.$$

Notînd $\| BC \| = a$, $\| AA' \| = h$, $\| AH \| = m$,

condiția devine:

$$h \leqslant \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m^2 + a^2}}{2} \Leftrightarrow 4h^2 + m^2 - 4mh \leqslant m^2 + a^2 \Leftrightarrow$$

$$4h^2 \leqslant 4mh + a^2 \Leftrightarrow a^2 \geqslant 4h(h - m) \Leftrightarrow$$

$$\| BC \|^2 \geqslant 4 \| AA' \| \cdot \| HA' \|.$$

În cazul $\| BC \| = 4 \| AA' \| \cdot \| HA' \|$ problema are o singură soluție.

47. $m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{CBA}) = 180$; $\dfrac{m(\widehat{EM}) + m(\widehat{FBA})}{2} + \dfrac{m(\widehat{MEA})}{2} = 180$.

Rezultă $m(\widehat{EM}) + m(\widehat{FBA}) + m(\widehat{MEA}) = 360 = m(\widehat{MEA}) + m(\widehat{FBA}) +$ $+ m(\widehat{MF})$, deci $m(\widehat{MF}) = m(\widehat{EM})$ ceea ce implică $\widehat{EMF} \equiv \widehat{MFE}$ deci $\triangle MEF$ este isoscel.

48. Avem $\| AT \|^2 = \| AB \| \cdot \| AC \|$ (puterea punctului) și

$$\frac{\| AM \|}{\| AT \|} = \frac{\| AN \|}{\| AC \|} \quad (Thales).$$

Înmulțind membru cu membru cele două egalități rezultă $\| AT \| \cdot \| AM \| =$ $= \| AB \| \cdot \| AN \|$, deci M, N, B, T sînt conciclice.

Observație. Pentru a face figura trebuie analizate mai multe cazuri:

$B \in |AC|$ sau $C \in |AB|$, $M \in |AT|$ sau $A \in |MT|$ sau $T \in |AM|$.

Dar demonstrația este independentă de figură.

49. Fie $\| AD \| = a$, $\| AB \| = b$, $\| CD \| = c$. Notăm cu O intersecția diagonalelor iar cu M punctul în care paralela dusă din O la AD taie baza AB.

Avem: $\dfrac{\| AM \|}{\| MB \|} = \dfrac{\| AO \|}{\| OB \|} = \dfrac{\| CD \|}{\| AB \|} = \dfrac{c}{b}$ = constant, deci punctul M e fix.

$$\frac{\| OM \|}{\| AD \|} = \frac{\| BM \|}{\| BA \|} = \frac{b}{b + c}.$$

Rezultă $\| OM \| = \dfrac{ab}{b + c}$ = constant. Deci O se află pe cercul de centru M și rază $\dfrac{ab}{b + c}$.

Reciproc, arătăm că orice punct O de pe cerc și care nu se află pe AB, aparține locului geometric (adică există un trapez $ABCD$ cu dimensiunile date, în care O este intersecția diagonalelor).

Ducem prin A o paralelă la MO și în semiplanul delimitat de AB care conține O, luăm pe această paralelă segmentul $[AD]$ de lungime a. Prin D deducem paralela la AB care taie AO în C. Rămîne de arătat că $\| CD \| = c$ ceea ce rezultă imediat. Deci locul geometric este cercul de centru $M \in |AB|$ $\left(\text{definit de relația } \dfrac{\| MA \|}{\| MB \|} = \dfrac{c}{b}\right)$, de rază $\dfrac{ab}{b + c}$, din care lipsesc punctele de intersecție cu AB.

50. Se arată că $AP \perp PB$. Locul geometric este un cerc.

51. $|NA| \equiv |NM| \Rightarrow N$ aparține mediatoarei segmentului $[AM]$ deci, dacă notăm cu P mijlocul segmentului $[AM]$, punctele P, N, O vor fi coliniare.

1) $O \in [PN] \Rightarrow \widehat{ANO} \in 30°$;

2) $N \in [OP] \Rightarrow \widehat{ANO} \in 150°$;

3) $P \in [ON] \Rightarrow \widehat{ANO} \in 30°$.

Deci N se poate afla pe două cercuri $\mathcal{C}(O, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ care trec prin A și O astfel încît arcele determinate în aceste cercuri de punctele A și O să aibă măsurile de 60 și 300. Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ au raza egală cu cea a cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și centrele situate pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrăm că orice punct de pe cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ aparține locului geometric. Pentru $N = O$ proprietatea este evidentă. Fie N pe un arc mic $\overset{\frown}{AD}$. Perpendiculara din A pe NO taie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în M. $ON \cap AM = \{P\}$. $ON \perp AN \Rightarrow |AP| \equiv |PM|$. N se află pe mediatoarea lui $[AM]$ deci $|NA| \equiv |NM|$, $m(\overset{\frown}{ANP}) = 180 - m(\overset{\frown}{ANO}) = 180 - 150 = 30$ deci $m(\overset{\frown}{ANM}) = 30 \cdot 2 = 60 \Rightarrow ANM$ este echilateral. Dacă N se află pe un arc mare $\overset{\frown}{AO}$, perpendiculara din A pe ON taie pe ON în P și cercul $\mathcal{C}(O,r)$ în M.

Se arată că ANM este echilateral.

Deci locul geometric este format din două arce ce trec prin A și O și au rază egală cu raza cercului dat.

52. Ca să se piardă cît mai puțin material, fiecare cerc trebuie să fie tangent la două laturi ale dreptunghiului și cercurile să fie tangente între ele. Punctul de tangență al cercurilor O este intersecția diagonalelor dreptunghiului. Fie E centrul cercului tangent laturilor $[AB]$ și $[AD]$, M și N proiecțiile punctelor E și O pe AB, iar P proiecția lui E pe ON.
Notăm $\|EM\| = r$. Aplicînd în EOP teorema lui *Pitagora* avem:

$$r^2 = \left(\frac{L}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{l}{2} - r\right)^2$$

$$r^2 = 2r^2 + \frac{L}{4} + \frac{l^2}{4} - r(L + l)$$

$$4r^2 - 4r(l + L) + L^2 + l^2 = 0.$$

Soluțiile ecuației sînt:

$$r = \frac{2(l + L) \pm 2\sqrt{l^2 + L^2 + 2lL - L^2 - l^2}}{4} = \frac{l + L \pm \sqrt{2Ll}}{2}.$$

Dar $r < \frac{l}{2}$, deci soluția problemei este:

$$r = \frac{L + l - \sqrt{2lL}}{2} \text{ (fig. III, 11).}$$

În cazul particular $L = l$ (pătrat) obținem

$$r = \frac{2l - \sqrt{2l^2}}{2} \text{ (fig. III, 12),}$$

iar în cazul $L = 2l$,

$$r = \frac{3l - 2l}{2} = \frac{l}{2} \text{ (fig. III, 13).}$$

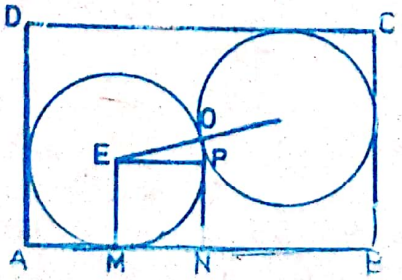


Fig. III, 11

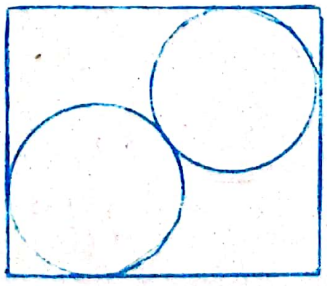


Fig. III, 12

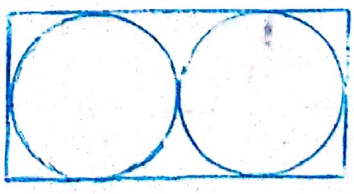


Fig. III, 13

Scanned with OKEN Scanner

53. 1) Punctele A_1, B_1, C_1 aparţin cercului circumscris şi sînt mijloacele arcelor $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ (unde $\widehat{BC} \subset \text{Int } \hat{A}$ şi analoagele). Folosind proprietăţile privind măsura unghiurilor cu vîrf pe cerc sau în interiorul cercului se arată că $\widehat{B_1CI} \equiv \widehat{B_1IC}$ deci $|B_1I| \equiv |B_1C|$ adică B_1 se află pe mediatoarea lui $[IC]$. Analog se arată că A_1 se află pe mediatoarea lui $[IC]$ deci A_1B_1 este mediatoarea lui $[IC]$.

2) Din demonstraţia de la punctul precedent rezultă că C_1I este înălţime în $A_1B_1C_1$. Analog se arată că B_1I este înălţime. Deci I este ortocentru.

54. 1) Notînd $\|AB\| = l$ rezultă:

$$\frac{\|CA\|}{\|CG\|} = \frac{\|CF\|}{\|CA\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (fig. III, 14).}$$

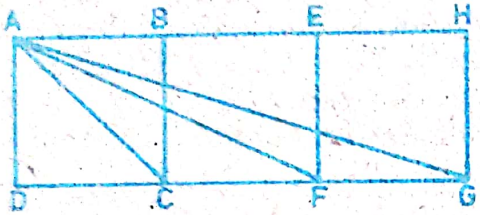


Fig. III, 14

Mai avem unghiul $\hat{C}$ comun aşa încît triunghiurile CAF şi CGA sînt asemenea.

2) Din $\|CA\|^2 = \|CF\| \cdot \|CG\|$ rezultă că CA este tangentă cercului circumscris $\triangle AFG$.

3) $m(\widehat{AFD}) + m(\widehat{AGD}) = m(\widehat{AFD}) + m(\widehat{FAC}) = m(\widehat{ACD}) = 45$.

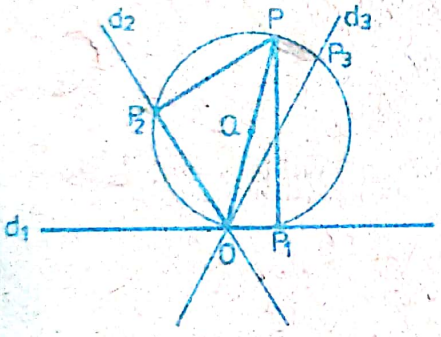


Fig. III, 15

60. Construim cercul cu diametrul $[PO]$, P fiind un punct din plan, iar P_1, P_2, P_3 proiecţiile lui P pe d_1 şi respectiv d_2, d_3. Observăm că P_1, P_2, P_3 sînt pe acest cerc, iar

$$m(\widehat{P_2OP_3}) = 60, \text{ (fig. III, 15),}$$

$$m(\widehat{P_2OP_3}) = \frac{m(\widehat{P_2PP_3})}{2} = m(\overset{\frown}{P_2P_1P_3}).$$

61. Presupunem că mediatoarea segmentului $[AB]$ intersectează cercul în S şi R, S de aceeaşi parte a lui AB ca şi C, $S \neq P$. Fie M_1 piciorul perpendicularei din S pe BC. Atunci CS este bisectoare exterioară a triunghiului ABC deoarece triunghiul CRS este dreptunghic în C şi $m(\widehat{ACR}) = \frac{m(\widehat{AR})}{2} = \frac{m(\widehat{RB})}{2} = m(\widehat{BCR})$.

În acest caz se arată uşor că M_1 este punctul pentru care are loc relaţia $\|AC\| + \|CM_1\| = \|M_1B\|$. Contradicţie.

62. Construim arcul capabil de unghiul dat $m(\hat{C})$ şi considerăm triunghiul isoscel ACB ($|AC| \equiv |BC|$) şi triunghiul AC_1B, C şi C_1 fiind puncte pe arcul construit. Se ştie că bisectoarea CD şi C_1E se intersectează pe cercul ce include arcul capabil de unghi dat în K. Diametrul $[CK]$ este mai mare decît coarda $[C_1K]$ adică $\|CD\| + \|DK\| > \|C_1E\| + \|EK\|$. Din triunghiul dreptunghic DEK avem $|DK| < |EK|$. Rezultă că $|CD| > |C_1E|$.

Scanned with OKEN Scanner

64. 1) Cercurile circumscrise triunghiurilor $BC'A'$ și $CA'B'$ se intersectează în punctul A'. Presupunem că nu sînt tangente. Atunci se mai intersectează într-un punct O și rezultă că patrulaterul $AB'OC'$ este inscriptibil.

2) $m(\widehat{BOC}) = m(\hat{A}) + m(\hat{A'})$ etc.

74. Se observă că triunghiurile OMP și OMD sînt isoscele.

75. Există A' astfel încît $ABA'C$ este un paralelogram. Se constată că $HBA'C$ este un patrulater inscriptibil. Avem $\triangle A'BC \equiv \triangle ABC$.

76. Dacă $\| BD \| = \| CD \|$ este evident. Presupunem $| BD | > | CD |$. Construim unghiul $\widehat{DAC'}$ (AD separă punctele C și C') care să fie congruent cu unghiul $\widehat{DAC}$. Se arată ușor că $ADC'B$ este un patrulater inscriptibil. Rezultă că cercul circumscris triunghiului ADC' este același cu cercul circumscris triunghiului ADB. Pe de altă parte, prin construcție $\triangle ADC \equiv \triangle ADC'$.

77. Presupunem $| AK | \geqslant | KB |$ și fie $C \in AK$, K între A și C astfel încît $| KC | \equiv | KB |$. Atunci $\widehat{KCB} \equiv \widehat{KBC}$ și $m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{KCB}) + m(\widehat{KBC})$ deoarece $\widehat{AKB}$ este unghi exterior triunghiului KBC. Rezultă că $m(\widehat{KCB}) = \frac{1}{2}(\widehat{AKB})$. Fie D mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $\widehat{AMD} \equiv \widehat{ACB}$ deoarece M este mijlocul lui $[AC]$. Rezultă că $m(\widehat{AMD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AKB})$. Prin urmare, pentru toate punctele $K \in \mathcal{C}(O, r)$ situate de aceeași parte a lui AB avem $m(\widehat{AKB}) = \frac{m(\widehat{AEB})}{2}$ și deci $m(\widehat{AMD}) = \text{const.}$, ceea ce înseamnă că M se află pe arcul de cerc în care $[AD]$ subîntinde un arc a cărui măsură este jumătate din $m(\widehat{AEB})$. Reciproc, orice punct M situat pe arcul cercului menționat, arc ale cărui extremități sînt P și D, P fiind mijlocul arcului $\widehat{AKB}$ din $\mathcal{C}(O, r)$, determină un punct $K \in \mathcal{C}(O, r)$ astfel încît M este mijlocul liniei poligonale AKB. Dacă $| AK | \leqslant | KB |$ (deci $K \in \widehat{APB}$) atunci locul este arcul simetric celui obținut mai sus față de PD (Fig. III,16). Cazul în care K se află în celălalt semiplan determinat de AB este analog.

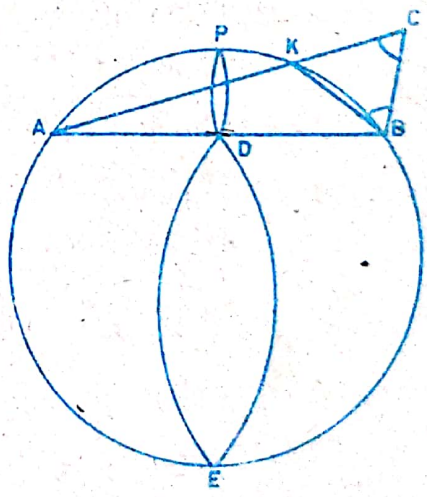


Fig. III, 16

78. Se folosește puterea punctului Q față de cele două cercuri.

79. Se arată că $\triangle MAA' \sim \triangle HMA'$ și astfel rezultă că $\widehat{AMA'}$ este unghi drept. Analog $\widehat{ANA'}$ este drept deci patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil. Cercul circumscris triunghiului $A'MN$ trece prin A și are diametrul $[AA']$. Cercul circumscris triunghiului $B'HC'$ trece prin A și are pe $[AH]$ ca diametru.

Scanned with OKEN Scanner

81. Se arată că avem $\| OO_1 \|^2 - \| OO_2 \|^2 = r_2^2 - r_1^2$, de unde rezultă ușor că O descrie o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2. Această dreaptă este simetrica axei radicale a cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ și coincide cu aceasta cînd $r_1 = r_2$.

82. Se procedează ca la demonstrația existenței centrului radical.

83. Se arată mai întîi că AH, BH și CH sînt simetricele mediatoarelor triunghiului ABC față de mediatoarele triunghiului format cu mijloacele laturilor triunghiului ABC.
Ținînd seamă de problema precedentă rezultă concluzia.

84. Fie P_1 piciorul perpendicularei din P pe AB și fie $\{L\} = CD \cap PP_1$. Triunghiurile dreptunghice AKD și PDL sînt conguente, deci $|KD| \equiv |PL|$. Rezultă $|PP_1| \equiv |PK|$ (fig. III, 17).

86. Trebuie să avem $\widehat{AC} \equiv \widehat{BC}$.

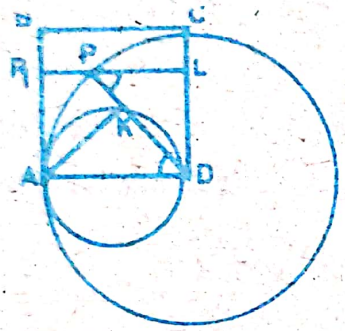


Fig. III, 17

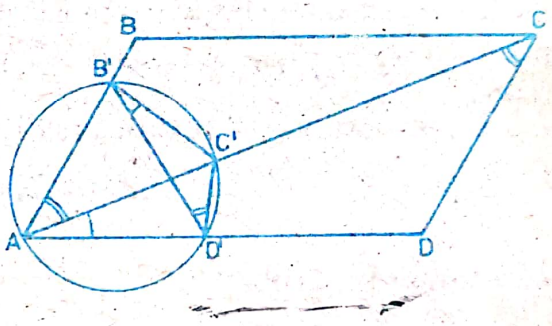


Fig. III, 18

87. Aplicăm teorema lui *Ptolemeu* în patrulaterul înscriptibil $AB'C'D'$ și ținem cont că $\triangle ACD \sim \triangle B'C'D'$ (fig. III, 18).

91. Cercurile circumscrise triunghiurilor OCC_1 și OAE sînt congruente deoarece diametrele lor $[OC]$ și $[OD]$ sînt congruente. Avem $m(\widehat{CGC_1}) = 2m(\widehat{C_1OE}) = m(\widehat{EGF})$ deci $\widehat{CGC_1} \equiv \widehat{EGF}$. Rezultă că $|CC_1| \equiv |EF|$.

93. Ducem diametrul $[CF]$. Atunci $\widehat{CBF} \in 90°$ și rezultă că AH și BF sînt paralele. Analog $HB \parallel AF$ și deci $AFBH$ este paralelogram. Rezultă că $|FB| \equiv |AH| \equiv |AD|$. Mai avem $m(\widehat{BFC}) = \dfrac{m(\widehat{BC})}{2} = m(\widehat{BAC})$ și $|FO| \equiv |AO| \equiv |AE|$. Rezultă că $\triangle BOF \equiv \triangle DEA$ și deci $|DE| \equiv |OB|$.

95. Fie D al doilea punct de intersecție al dreptei BI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Se arată că AID este isoscel.

97. Fie $[BD]$ diametru în $\mathcal{C}(O, r)$. Se aplică teorema lui *Ptolemeu* în patrulaterul $ABCD$.

98. Fie P punctul căutat. Considerăm triunghiul $A'B'C'$ care se formează ducînd perpendiculara pe AB în A, perpendiculara pe BC în B și perpendiculara pe AC în C. Distanțele de la P pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt egale, deci P este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

99. Fie R_1 și R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și BCM. Avem $R_1 + R_2 \geq \frac{\|AB\| + \|BC\|}{2}$ și $R_1 + R_2 = \frac{\|AB\| + \|BC\|}{2}$ dacă și numai dacă M este piciorul perpendicularei din B pe AC.

100. Tangenta la cercul înscris are un punct în Int ABC așa încît va intersecta două din laturile triunghiului spre exemplu $[BC]$ și $[AC]$ în D, respectiv E. Rezultă ușor că perimetrul triunghiului CDE este $a + b - c$. Analog în celelalte cazuri.

103. Fie A, B, C centrele celor trei cercuri congruente de rază r, iar O centrul cercului în care sînt înscrise. Avem $\|AO\| \cdot \sqrt{3} = \|AB\|$, $\|AB\| = \|AP\| + \|BP\| = 2r$, $\|OA\| = \|OD\| - \|AD\| = R - r$. Din relația $2r = (R - r)\sqrt{3}$ avem $r = R(2\sqrt{3} - 3)$ (fig. III, 19).

104. Avem $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$ și $C' \in |AB|$ deoarece $\hat{B}(\hat{D})$ este optuz și $\hat{A}(\hat{C})$ este ascuțit. Deoarece punctele C', B, A', și D se află pe cercul cu diametrul $[BD]$ rezultă că $m(\widehat{C'OB}) = 2m(\widehat{BDA'})$ de unde rezultă că $m(\widehat{C'OA'}) = m(\widehat{C'OB}) + m(\widehat{BOA'}) = 2(m(\widehat{C'DB}) + m(\widehat{BDA'})) = 2(90 - m(\widehat{ABD}) + 90 - m(\widehat{DBC})) = 2[180 - (m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}))] = 2m(\widehat{BAD})$. Deoarece patrulaterele $AC'B'D$ și $DB'A'C$ sînt inscriptibile avem $m(\widehat{C'B'A}) = m(\widehat{C'DA}) = 90 - m(\widehat{BAD})$ și $m(\widehat{A'B'C}) = m(\widehat{A'DC}) = 90 - m(\widehat{A'CD}) = 90 - m(\widehat{BAD})$, de unde rezultă că $m(\widehat{C'B'A'}) = 180 - m(\widehat{C'B'A}) - m(\widehat{A'B'C}) = 180 - (90 - m(\widehat{BAD})) - (90 - m(\widehat{BAD})) = 2m(\widehat{BAD})$. Deducem că $\widehat{C'OA'} \equiv \widehat{C'B'A'}$, deci A', B', C' și O sînt pe un cerc.

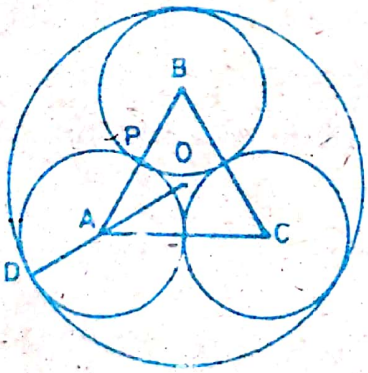


Fig. III, 19

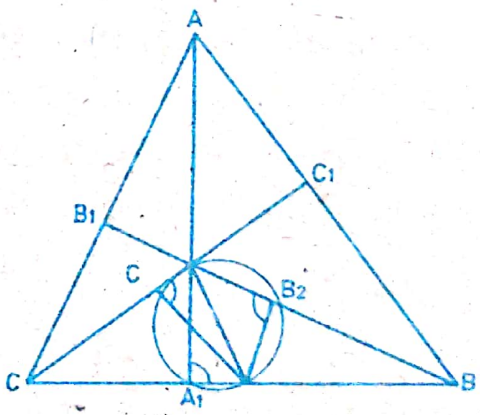


Fig. III, 20

105. Notăm M mijlocul laturii $[BC]$ și considerăm cercul de diametru $[HM]$. Atunci $\widehat{MA_1H} \in 90$, $[MB_2]$ este linie mijlocie în triunghiul BCB_1 și deci $MB_2 \| AC$. Prin urmare și unghiul $\widehat{MB_2H}$ este drept. Analog se arată că și unghiul $\widehat{MC_2H}$ este drept (fig. III, 20).

106. Avem $\triangle ADE \sim \triangle BGD$, de unde $\frac{\|BD\|}{\|DE\|} = \frac{\|DG\|}{\|DA\|}$ ș.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

107. Se arată că tangentele în E la cercurile circumscrise triunghiurilor ABE și CDE formează unghiuri congruente cu dreapta EC.

108. Fie K_1, K_2 punctele de tangență ale cercurilor înscrise în triunghiul ABC și respectiv ACD cu diagonala $[AC]$, iar M, N P, S celelalte puncte de tangență (fig. III, 21, fig. III, 22).

Avem $\|AB\| + \|CD\| = \|AM\| + \|MB\| + \|CS\| + \|SD\| =$
$= \|AK_1\| + \|BN\| + \|K_2C\| + \|PD\|$ și $\|BC\| + \|AD\| =$
$= \|BN\| + \|NC\| + \|AP\| + \|PD\| =$
$= \|BN\| + \|K_1C\| + \|AK_2\| + \|PD\|.$

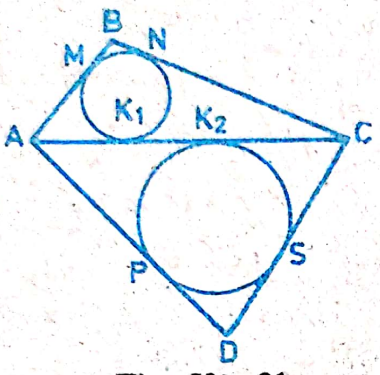


Fig. III, 21

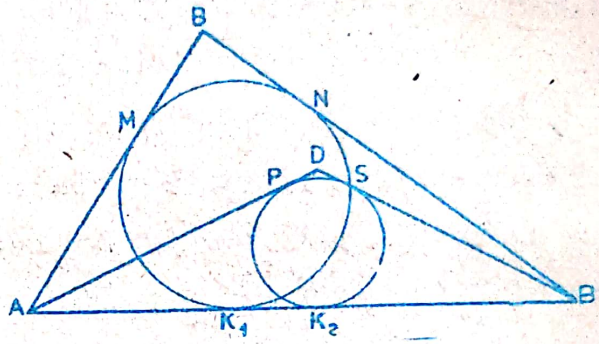


Fig. III, 22

Prin urmare $\|AB\| + \|CD\| = \|BC\| + \|AD\|$ dacă și numai dacă $\|AK_1\| + \|K_2C\| = \|AK_2\| + \|K_1C\|$ deci dacă și numai dacă $K_1 = K_2$ (fig. III, 24 reprezintă cazul patrulaterului neconvex).

109. 1) $c = \dfrac{a^2 - 2r(a-r)}{a-2r}$; $\quad b = \dfrac{2r(a-r)}{a-2r}$.

2) Lungimile catetelor sînt soluțiile ecuației

$$x^2 - (c + 2r)x + 2r(c + r) = 0.$$

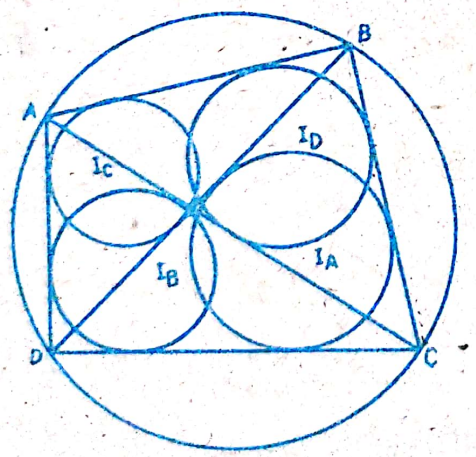


Fig. III, 23

110. Notăm cu I_D, I_A, I_B, I_C centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, CDA și DAB respectiv (fig. III, 23). Avem:

$$m(\widehat{BI_AC}) = 180 - \frac{1}{2}(m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{DCB})) =$$

$$= 180 - \frac{1}{2}(180 - m(\widehat{BDC})) =$$

$$= 90 - \frac{1}{2}m(\widehat{BDC}).$$

Analog $m(\widehat{BI_DC}) = 90 + \dfrac{1}{2}m(\widehat{BAC})$.

Dar $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BAC}$ și deci $\widehat{BI_AC} \equiv \widehat{BI_DC}$. Rezultă că punctele B, I_A, C, I_D sînt pe un cerc. Prin urmare avem $m(\widehat{I_DBC}) + m(\widehat{I_DI_AC}) = 180$.

Analog $m(\widehat{I_BDC}) + m(\widehat{I_BI_AC}) = 180$.

Scanned with OKEN Scanner

Adunăm membru cu membru ultimele două egalităţi şi obţinem

$$m(\widehat{I_DBC}) + m(\widehat{I_DI_AC}) + m(\widehat{I_BDC}) + m(\widehat{I_BI_AC}) = 360.$$

Mai avem $m(\widehat{I_DBC}) + m(\widehat{I_BDC}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC})) = 90$ şi

$m(\widehat{I_DI_AI_B}) = 360 - (m(\widehat{I_DI_AC}) + m(\widehat{I_BI_AC})) = 360 - (180 - m(\widehat{I_DBC}) +$
$+ 180 - m(\widehat{I_BDC})) = 90$ şi deci $I_AI_BI_DI_C$ este un dreptunghi.

112. Fie $[MA]$, $[MB]$ şi $[MC]$ coarde în $\mathcal{C}(O, r)$ şi fie D, E şi F punctele de intersecţie ale cercurilor cu diametrele $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ respectiv. Unghiurile înscrise $\widehat{MFC}$ şi $\widehat{MFB}$ sînt drepte deoarece $[MC]$ şi $[MB]$ sînt diametre. Rezultă că punctele B, F, C sînt coliniare. De asemenea $\widehat{MDA} \equiv \widehat{MDB} \in 90°$ şi deci punctele D, A, B sînt coliniare. Mai avem $m(\widehat{BAM}) + m(\widehat{DAM}) = 180$ (1). Ţinem seama că $m(\widehat{BAM}) + m(\widehat{BCM}) = 180$ şi $m(\widehat{FEM}) + m(\widehat{FCM}) = 180$ ca unghiuri opuse în patrulaterele inscriptibile $ABCM$ şi $CFEM$.

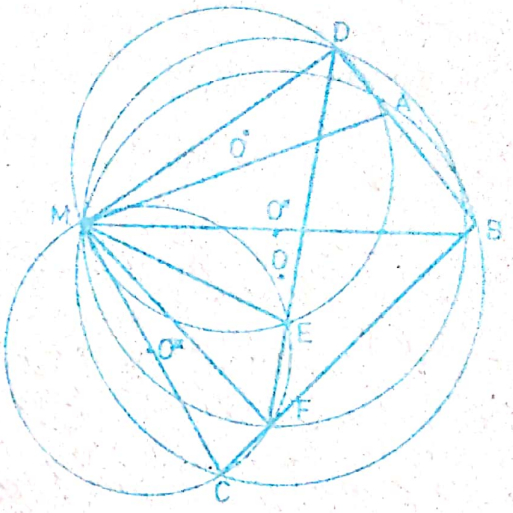


Fig. III, 24

Dar $\widehat{BCM} \equiv \widehat{FCM}$ şi deci $\widehat{BAM} \equiv \widehat{FEM}$. Mai mult $\widehat{DAM} \equiv \widehat{DEM}$ şi dacă ţinem seama de (1) avem $m(\widehat{FEM}) + m(\widehat{DEM}) = 180$ adică D, E, F sînt coliniare (fig. III, 24).

113. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Din patrulaterul inscriptibil AC_1HB rezultă $\widehat{BB_1C_1} \equiv \widehat{HAB}$. Analog, obţinem $\widehat{BB_1A_1} \equiv \widehat{HCA_1}$. Dar $m(\widehat{HAB}) + m(\widehat{ABC}) = 90$ şi $m(\widehat{HCB}) + m(\widehat{ABC}) = 90$ deci $\widehat{BB_1C_1} \equiv \widehat{BB_1A_1}$ ceea ce arată că înălţimea BB_1 a triunghiului ABC este bisectoarea unghiului $\widehat{C_1B_1A_1}$.

114. Fie O şi O_1 centrele cercurilor înscrise triunghiurilor ABD şi BDC. Notăm $\|MD\| = x$, $\|DP\| = y$, $\|AB\| = \|BC\| = \|AC\| = a$ (fig. III, 25), unde M şi P sînt proiecţiile punctelor O şi O_1 pe AC. Avem $\triangle OMD \sim \triangle O_1PD$ avînd $\widehat{MOD} \equiv \widehat{O_1DP}$ ($OM \perp DP$, $OD \perp O_1D$). Rezultă că:

$$\frac{r}{x} = \frac{y}{2r} \quad (1),$$

r fiind raza cercului înscris în $\triangle ABD$. Fie L şi S proiecţiile punctelor O şi O_1 pe AB, respectiv BC.

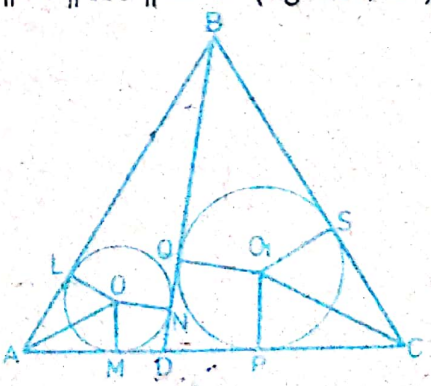


Fig. III, 25

Din $\triangle AOM$ și $\triangle O_1CP$ avem $\|AM\| = \|AL\| = r\sqrt{3}$, $\|PC\| = \|SC\| = 2r\sqrt{3}$. Dar $|BL| \equiv |BN|$, $|BQ| \equiv |BS|$, $\|MD\| = \|ND\| = x$, $\|DQ\| = \|DP\| = y$.

Prin urmare avem $\|BL\| = \|AB\| - \|AL\| = a - r\sqrt{3}$, $\|BS\| = \|BC\| - \|CS\| = a - 2r\sqrt{3}$, $\|BQ\| = \|BN\| - \|NQ\| = \|BN\| - (\|DQ\| - \|ND\|) = a - r\sqrt{3} - y + x$ și $\|BQ\| = \|BS\| = a - 2r\sqrt{3}$ de unde

$$y - x = r\sqrt{3}. \quad (2)$$

Din sistemul de ecuații (1) și (2) rezultă:

$$x = \frac{r(\sqrt{11} - \sqrt{3})}{2}, \quad y = \frac{r(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{2}.$$

În final avem $\frac{\|AD\|}{\|DC\|} = \frac{1 + \sqrt{33}}{16}$.

115. Patrulaterul $MDNA$ este inscriptibil și rezultă că $\widehat{NAB} \equiv \widehat{CDN}$. Analog obținem $\widehat{NBA} \equiv \widehat{DCN}$. Din enunț avem că $|AB| \equiv |CD|$, prin urmare $\triangle ANB \equiv \triangle CND$(U.L.U) de unde $|AN| \equiv |ND|$. Fie $NK \perp MB$ și $NL \perp MD$, $K \in h$, $L \in k$. Triunghiurile dreptunghice ANK și DNL sînt congruente și rezultă că $|NK| \equiv |NL|$, deci N se află pe bisectoarea unghiului $\hat{hk}$. Reciproc, dacă N este pe bisectoarea unghiului $\hat{hk}$, atunci două cercuri care trec prin M și N intersectează laturile unghiului astfel: un cerc intersectează pe h în A și pe k în D iar celălalt cerc intersectează pe h în B și pe k în C și avem $|AB| \equiv |CD|$.

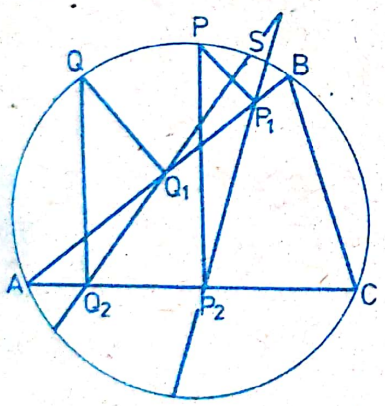


Fig. III, 26

117. Fie PP_1, PP_2 și QQ_1, QQ_2 perpendicularele din P și Q pe AB și respectiv AC (fig. III, 26). Dacă $\{S\} = Q_1Q_2 \cap P_1P_2$ atunci $m(\widehat{Q_1SP_1}) = |m(\widehat{P_1Q_2A}) - m(\widehat{Q_1Q_2A})| = |m(\widehat{P_1PA}) - m(\widehat{Q_1QA})|$, dar această ultimă diferență depinde de $m(\widehat{PQ})$.

118. Notăm $\|AB\| = R$, $\|BC\| = x$, $\|AC\| = 2x$. Atunci $x^2 + 4x^2 = R^2$ de unde rezultă $\|BC\| = x = \frac{R}{\sqrt{5}}$, $\|AC\| = \frac{2R}{\sqrt{5}}$.

Deoarece $[BD]$ este bisectoare avem $\frac{\|CD\|}{\|AD\|} = \frac{\|BC\|}{\|AB\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ sau

$$\frac{\|CD\| + \|AD\|}{\|AD\|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$$

Rezultă $\|AD\| = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$.

Mai avem $\| CD \| = \frac{2R}{\sqrt{5}} - \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$;

$$\| BD \| = \sqrt{\| BC \|^2 + \| CD \|^2} = \sqrt{\frac{R^2}{5} + \frac{R^2(3-\sqrt{5})}{10}} =$$

$$= R\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}\| BC \|\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

119. În triunghiul dreptunghic ABC în care $[AB]$ este ipotenuza şi $[CD]$ înălţimea corespunzătoare ipotenuzei, arătăm că $\frac{r}{h_c} > 0{,}4$ unde $h_c = \| CD \|$.

Avem $r = \frac{a+b-c}{2}$ (2) unde

$a = \| BC \|$, $b = \| AC \|$, $c = \| AB \|$. Triunghiurile dreptunghice ABC şi BCD sînt asemenea de unde obţinem $h_c = \frac{ab}{c}$ (3).

Din (1) şi (3) avem $\frac{r}{h_c} = \frac{(a+b-c)}{2ab}$. Inegalitatea (1) este echivalentă astfel cu $\frac{(a+b-c)c}{2ab} > 0{,}4$ (4) sau, mai departe:

$\frac{(a+b-\sqrt{a^2+b^2})\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} > \frac{2}{5}$ sau $5(a+b)\sqrt{a^2+b^2} > 5a^2 + 4ab + 5ab^2$ (5) sau, ridicînd la pătrat şi efectuînd calculele: $5a^3b - 8a^2b^2 + 5ab^3 > 0$. Dar $5a^3b - 8a^2b^2 + 5ab^3 > 5a^3b - 10a^2b^2 + 5ab^3 = 5ab(a-b)^2 \geqslant 0$ (6).

Demonstrăm acum că $\frac{r}{h_c} < 0{,}5$ (7). Aceasta este echivalentă cu $\frac{(a+b-c)c}{2ab} < \frac{1}{2}$ (8). Substituind $c = \sqrt{a^2+b^2}$ avem $(a+b)\sqrt{a^2+b^2} < a^2 + ab + b^2$ care revine la $a^2b^2 > 0$.

120. Fie L, P, Q picioarele perpendicularelor din O pe AB, respectiv MN şi BC (fig. III, 27). Vom arăta că $\triangle AOM \sim \triangle CNO$.

În aceste triunghiuri avem $\hat{A} \equiv \hat{C}$ deoarece triunghiul ABC este isoscel. Mai arătăm că $\widehat{MOA} \equiv \widehat{ONC}$. Deoarece $OL \perp AB$ şi $OQ \perp BC$ rezultă că $m(\widehat{LOQ}) = 180 - m(\hat{B})$. Mai avem că $180 - m(\hat{B}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 2m(\hat{A})$. Rezultă că $m(\widehat{LOQ}) = 2m(\hat{A})$.

Dar $|OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{LOP}$. Deci $m(\widehat{LOQ}) = 2m(\widehat{MON}) = 2m(\hat{A})$ şi $m(\widehat{MON}) = m(\hat{A})$. În triunghiurile AOM şi ONM avem de asemenea $\widehat{AMO} \equiv \widehat{NMO}$ de unde rezultă că $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MNO}$.

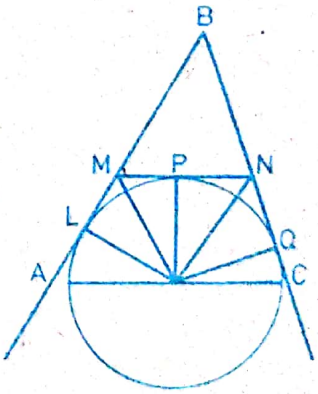


Fig. III, 27

Deoarece $\widehat{MNO} \equiv \widehat{ONC}$ rezultă că $\widehat{MOA} \equiv \widehat{ONC}$. Astfel avem că $\triangle AOM \sim \triangle CNO$. În particular avem $\frac{\|AM\|}{\|AO\|} = \frac{\|OC\|}{\|NC\|}$.

Deci $\|AM\| \cdot \|NC\| = \|AO\| \cdot \|OC\| = \|AO\|^2 = \left(\frac{\|AO\|^2}{2}\right)$.

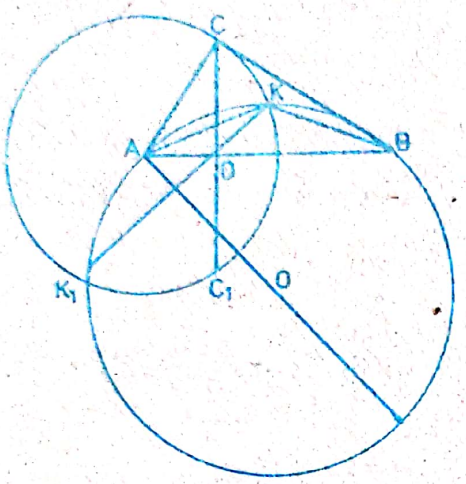


Fig. III, 28

121. Fie C_1 și K_1 punctele în care CD și respectiv KD mai intersectează cercul $\mathcal{C}(A, \|AC\|)$.

În triunghiul dreptunghic ABC avem $\|AD\| \cdot \|DB\| = \|DC\|^2 = \|DC\| \cdot \|DC_1\|$ iar în cercul $\mathcal{C}(A, \|AC\|)$ avem $\|CD\| \cdot \|DC_1\| = \|DK\| \cdot \|DK_1\|$. Rezultă că $\|AD\| \cdot \|DB\| = \|DK\| \cdot \|DK_1\|$ (fig. III, 28). Această ultimă relație ne arată că punctele A, B, K, K_1 aparțin cercului circumscris triunghiului AKB. Dar K_1 aparține și cercului $\mathcal{C}(A, \|AC\|)$ și deci $|KK_1|$ este coardă comună celor două cercuri și deci perpendiculară pe linia centrelor.

122. Triunghiurile OAP și CAH fiind dreptunghice, arătăm că $\widehat{AOP} \equiv \widehat{ACH}$ (fig. III, 29).

Presupunem că $m(\hat{C}) < 90$. Atunci $\widehat{ACH} \equiv \hat{C}$ și deci $\widehat{ACH}$ are măsura $\frac{m(\widehat{AB})}{2}$. Dar $OP \perp AB$ și deci $\widehat{MA} \equiv \widehat{MB}$, de unde rezultă că $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{AM}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$.

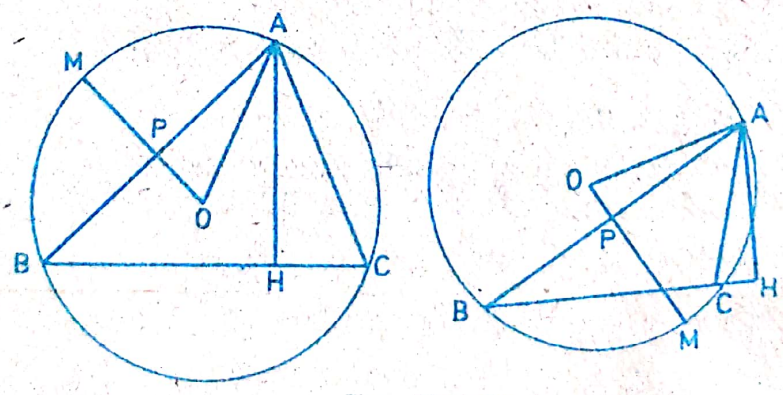


Fig. III, 29

Dacă $m(\hat{C}) > 90°$, atunci $m(\widehat{ACH}) + m(\hat{C}) = 180$ deci $m(\widehat{ACH}) = \frac{m(\widehat{ACB})}{2}$.

La fel $OP \perp AB$ și deci $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$, de unde rezultă că $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{AM}) = \frac{m(\widehat{ACB})}{2}$. Avem astfel $\widehat{ACH} \equiv \widehat{AOP}$.

Scanned with OKEN Scanner

123. Se arată că DE este perpendiculară pe bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$.

124. Se arată că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{O_1AO_2}$.

125. Trapezul $ACDF$ are diagonalele $[AD]$ și $[CF]$ congruente, prin urmare este isoscel (fig. III, 30). Rezultă că $\widehat{LCD} \equiv \widehat{LDC}$. Dar $\widehat{LAF} \equiv \widehat{LDC}$ și $\widehat{AFL} \equiv \widehat{DCL}$ (alterne interne congruente). Atunci deci $\widehat{LCD} \equiv \widehat{LDC} \equiv \widehat{LAF} \equiv \widehat{LFA}$. Analog avem $\widehat{KBA} \equiv \widehat{KAB} \equiv \widehat{KED} \equiv \widehat{KDE}$ și $\widehat{MCB} \equiv \widehat{MBC} \equiv \widehat{MEF} \equiv \widehat{MFE}$. Considerînd patrulaterul $BCDE$ avem că sumele măsurilor unghiurilor lui opuse sînt egale și deci $BCDE$ este inscriptibil. Dar deoarece $\widehat{CBE} \equiv \widehat{CFE}$, rezultă că cercul circumscris patrulaterului $BCDE$ trece prin F. Analog, $\widehat{DCF} \equiv \widehat{DAF}$ arată că același cerc trece prin A.

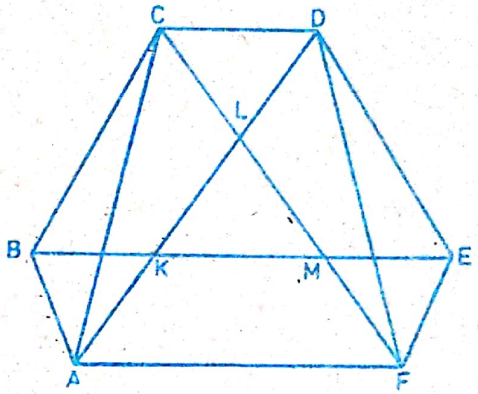


Fig. III, 30

126. 2) Considerînd triunghiurile dreptunghice ABC, BCD și ADC avem $\hat{B} \equiv \widehat{ACD}$, prin urmare sînt asemenea. Rezultă că avem $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{a}$, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b}$ și ținînd cont că $c^2 = a^2 + b^2$, obținem $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

128. Se observă că $AC \perp BO$ (O centrul cercului circumscris). Fie $x = \| AC \|$ lungimea diagonalelor. Din triunghiurile dreptunghice BNC și ONC avem

$$\| BN \| = \sqrt{\| BC \|^2 - \| NC \|^2}; \quad \| ON \| = \sqrt{\| OC \|^2 - \| NC \|^2}.$$

Dar $\| BN \| + \| NO \| = R$ (R = raza cercului circumscris). Avem deci $R = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$ de unde obținem $a^4 + R^2(4a^2 - x^2)$ (1).

Pe de altă parte avem: $a = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{10}}$ (2).

Din (1) și (2) obținem $x = \frac{a(5 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$.

129. Fie $\{L\} = OB \cap AD$. Avem $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{OAD}) = m(\widehat{BAD}) = 36$. Rezultă că $m(\widehat{ALB}) = 72$. Dar $m(\widehat{ABL}) = 72$ și deci $|AL| \equiv |AB|$, $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{OLD}) = 72$. Prin urmare $\| LD \| = \| OD \| = \| AO \|$ și obținem $\| AD \| = \| AL \| + \| LD \| = \| AB \| + \| AO \|$.

130. Fie $ABCDEFGHKL$ decagonul regulat înscris în $\mathcal{C}(O, R)$. Decagonul stelat regulat înscris în $\mathcal{C}(O, R)$ este linia poligonală închisă $[AD] \cup [DG] \cup [GL] \cup [LC] \cup [CF] \cup [FK] \cup [KB] \cup [BE] \cup [EH] \cup [HA]$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm $\{M\} = OB \cap AD$. Considerînd triunghiurile AMB și MOD avem $\widehat{ABM} \equiv \widehat{AMB}$ și $\widehat{DMO} \equiv \widehat{DOM}$. Rezultă că $|AM| \equiv |AB|$ și $|DM| \equiv |DO|$. Prin urmare $\|AD\| = \|AM\| + \|MD\| = \|AB\| + \|OD\|$.

131. 1) Fie $a_5 = \|AB\|$, lungimea laturii pentagonului regulat înscris în $\mathcal{C}(O, R)$ (fig. III, 31). Ducînd prin O și B paralele la AB și AO construim paralelogramul $OABD$. Fie DE, $E \in \mathcal{C}(O, R)$ tangentă la $\mathcal{C}(O, R)$. Atunci $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{BOA}) = 72$, $m(\widehat{BCO}) = 72$ și deci $m(\widehat{BOC}) = 180 - 2 \cdot 72 = 36$. Prin urmare $\|BC\| = a_{10}$ și $\|BC\|^2 = \|BD\| \cdot \|CD\|$. Cum DE este tangentă la $\mathcal{C}(O, R)$ rezultă că $\|DE\|^2 = \|BD\| \cdot \|CD\|$ ceea ce înseamnă că $\|DE\| = \|BC\| = a_{10}$. Dar $\|OE\| = a_6$, $\|OD\| = a_5$. În triunghiul dreptunghic OED avem $\|OD\|^2 = \|OE\|^2 + \|DE\|^2$, adică $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$.

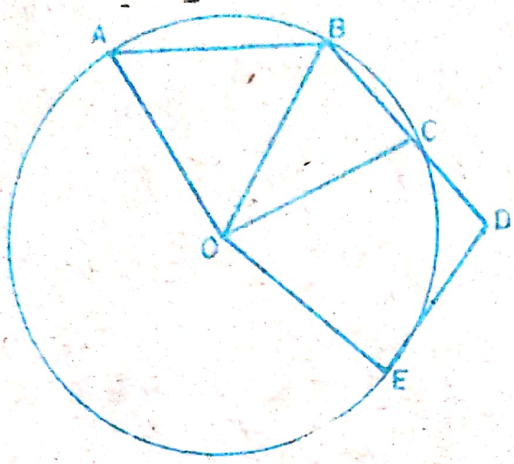


Fig. III, 31

2) Știm că $a_5 = \frac{1}{2} R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $a_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$, $a_6 = R$. Un calcul simplu ne arată că $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$.

132. Fie $ABCDEFGHI$ nonogonul regulat înscris în $\mathcal{C}(O, R)$. Fie $K \in |CH|$ astfel încît $|CK| \equiv |CA|$. Avem $\triangle ACI \equiv \triangle KCI$ deoarece $\widehat{ACI} \equiv \widehat{ICH}$ și $|AC| \equiv |CK|$ iar latura $|IC|$ este comună.
Rezultă că $|KI| \equiv |AI|$, $\widehat{KHI} \in 60°$, $m(\widehat{KIH}) = m(\widehat{AIH}) - 2m(\widehat{AIC}) = 140 - 2 \cdot 40 = 60$ și deci triunghiul KHI este echilateral.
Deci $|KH| \equiv |IH|$. Dar $\|KH\| = \|CH\| - \|AC\|$ și $[CH]$ este cea mai mare diagonală, iar $[AC]$ cea mai mică.
2) Fie $R = 1$, $\|AB\| = x$, $\|AC\| = y$, $\|AD\| = a_3 = \sqrt{3}$. Se știe că $x^2 = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ (1).
Aplicînd în patrulaterul inscriptibil $ABCD$ teorema lui *Ptolemeu* avem $x^2 + x\sqrt{3} = y^2$ (2). Din (1) și (2) obținem $3x - x^3 = \sqrt{3}$.
Prin urmare x nu poate fi număr rațional, deoarece diferența este număr irațional.

134. Notăm $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$, $\|BC\| = a$. Din ipoteză rezultă că $a < b < c$. Fie M, L, N picioarele perpendicularelor duse din I pe $|AC|$ respectiv pe $|BC|$ și $|AB|$. Remarcăm mai întîi că $m(\widehat{IBO}) < m(\widehat{CBO}) < 90$.
Dacă am avea $m(\widehat{IOB}) = 90$ atunci cum O este mijlocul lui $|AB|$, N coincide cu O și $\triangle IAO \equiv \triangle IBO$ de unde ar rezulta $\widehat{IAB} \equiv \widehat{IBA}$ și $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$; dar din ipoteză avem că $m(\widehat{CAB}) < m(\widehat{CBA})$. Rezultă că $m(\widehat{IOB}) \neq 90$
Astfel dacă triunghiul $\widehat{BIO}$ este dreptunghic, atunci $\widehat{BIO} \in 90°$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă ușor $\|AM\| = \|AN\| = \frac{b+c-a}{2}$, $\|BN\| = \|BL\| = \frac{a+c-b}{2}$;

$\|MI\| = \|NI\| = \|LI\| = \frac{a+b-c}{2}$, și $\frac{b+c-a}{2} > \frac{c}{2}$ ceeace arată că N se află între O și B și apoi $\|NO\| = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}$, $\|OI\|^2 = \|IN\|^2 + \|NO\|^2 = \left(\frac{a+b-c)^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, $\|BI\|^2 = \|BL\|^2 + \|IL\|^2 = \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$, $\|BO\|^2 = \frac{c^2}{4}$.

Din teorema lui *Pitagora* $\|OI\|^2 + \|BI\|^2 = \|BO\|^2$, de unde rezultă

$$2a^2 + 2b^2 + c^2 - ac - 3bc = 0, \text{ sau } 3c^2 = ac + 3bc.$$

Deci avem $3c = a + 3b$, $c^2 = a^2 + b^2$ de unde obținem:

$$\frac{a}{c} = \frac{3}{5}, \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{5}.$$

135. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ cercul circumscris triunghiului ABC. Deoarece $\hat{A}$ este obtuz, rezultă că $O, H \in \text{Ext } ABC$. Fie $[AP]$, $[BQ]$, $[CR]$ înălțimile triunghiului ABC (fig. III, 32) și S centrul cercului circumscris triunghiului BCH, $S \in \mathcal{C}(O, r)$. Notăm $m(\widehat{BCS}) = \alpha$, $m(\widehat{SCA}) = \beta$, $m(\widehat{ACH}) = \gamma$. Triunghiurile BQH și CRH sînt dreptunghice și deci: $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{QBH}) = 90 - m(\widehat{BHQ}) = 90 - m(\widehat{RHC}) = m(\widehat{HCR}) = \gamma$. Dar $m(\widehat{ABS}) = \frac{m(\widehat{AS})}{2} = m(\widehat{ACS})$ și deoarece triunghiurile SBH și SCH sînt isoscele, rezultă că

$m(\widehat{BHC}) = m(\widehat{BHS}) + m(\widehat{SHC}) = m(\widehat{SBH}) + (\widehat{SCH}) = m(\widehat{ABH}) - m(\widehat{ABS}) + m(\widehat{ACS}) + m(\widehat{ACH}) = \gamma - \beta + \beta + \gamma = 2\gamma.$

Deoarece triunghiul CHR este dreptunghic, deducem $\gamma + 2\gamma = 90$, deci $\gamma = 30$. Triunghiul BSC este isoscel, deci $\widehat{SBC} \equiv \widehat{SCB}$ și avem $m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{SBC}) - m(\widehat{SBA}) = \alpha - \beta$. Triunghiul BQC fiind dreptunghic, rezultă $(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta + \gamma) = 90$ deci $2\alpha + \gamma = 90$, de unde obținem $\alpha = 30$. Rezultă că

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BSC}) = 120.$$

Astfel $[BC]$ este latura triunghiului echilateral înscris în $\mathcal{C}(O, r)$ și rezultă $r = 2\sqrt{3}$.

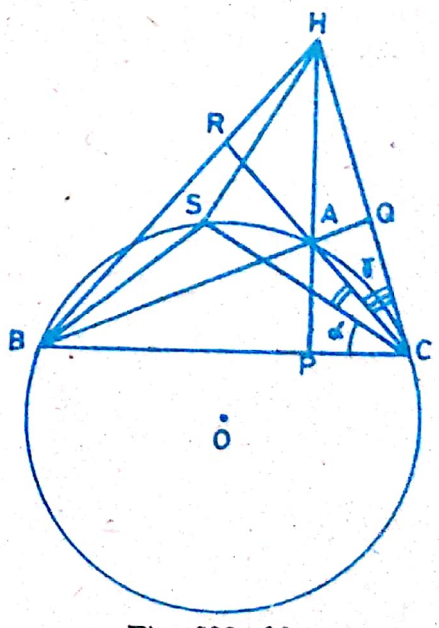


Fig. III, 32

Scanned with OKEN Scanner

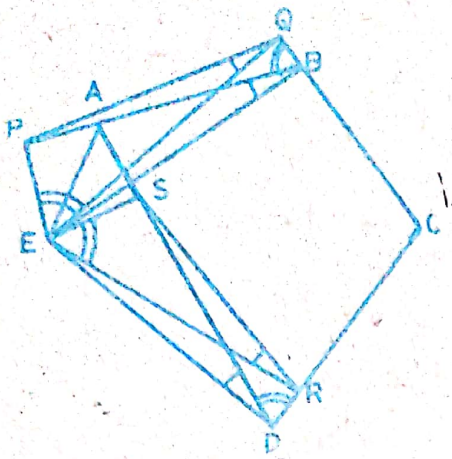


Fig. III, 33

136. Fie P, Q, R, S proiecțiile lui E pe dreptele AB, BC, CD și AD respectiv. (fig. III, 33). Punctele E, S, R, D sînt situate pe cercul cu diametrul $[ED]$. Rezultă $\widehat{ERS} \equiv \widehat{EDS}$. Analog E, P, Q, B sînt situate pe cercul de diametru $[EB]$, de unde rezultă $\widehat{PQE} \equiv \widehat{PBE}$. Rezultă $\widehat{EDS} \equiv \widehat{PBE}$ și deci $\widehat{ERS} \equiv \widehat{PQE}$. Deoarece punctele E, S, R, D sînt situate pe un cerc, atunci $\widehat{SER} \equiv \widehat{SDR}$. Ținînd seama că $\widehat{ADC}$ și $\widehat{ABC}$ sînt unghiuri opuse în patrulaterul inscriptibil $ABCD$, rezultă că

$$m(\widehat{SER}) = 180 - m(\widehat{ABC}). \quad (1).$$

Punctele E, P, Q, B fiind situate și ele pe un cerc avem

$$m(\widehat{PEQ}) = m(\widehat{PBQ}) = 180 - m(\widehat{ABC}) \quad (2).$$

Din (1) și (2) deducem că $\widehat{SER} \equiv \widehat{PEQ}$. Rezultă că triunghiurile PEQ și SER au cîte două unghiuri congruente, deci sînt asemenea, de unde $\| ES \| = \frac{a \cdot c}{b}$.

137. Arătăm că cercul $\mathcal{C}(I, r)$ circumscris triunghiului OAB intersectează bisectoarea unghiului $\widehat{hk}$ într-un punct D care este fix. Pentru aceasta fie $M \in |OA$ astfel că $\| OM \| = K$. Rezultă imediat că $\triangle AMD \equiv \triangle OBD$ și avem astfel $\| OD \| = \| MD \|$, deci D este la intersecția bisectoarei cu mediatoarea lui $[OM]$. Locul geometric al punctului I este un segment $[UV]$ situat pe mediatoarea lui $[OD]$. Punctul U este centrul cercului care trece prin punctele O și M și este tangent semidreptei $|OB$ în O. Analog se precizează punctul V.

Marius Iosifescu, G.M.F. 1954, 729).

138. Se analizează separat cazurile cînd M variază pe cele două arce determinate de coarda $[BC]$ în cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$.

139. Deoarece $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{EAB})$ avem $\| DE \| = \| EB \|$. $[EF]$ și $[BD]$ fiind diametre rezultă că $EDFB$ este pătrat, deci $\| DF \| = \| FB \|$. Patrulaterul $MNAF$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{DFE}) = 45$. Atunci $m(\widehat{FNM}) = m(\widehat{FAB})$. Dar $m(\widehat{FAB}) = m(\widehat{FDB})$. Deci $MN \parallel BD$ și astfel $MN \perp EF$.

141. Avem $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{ABO}) = 90 - m(\widehat{MBA})$, de unde rezultă că $m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{MBA}) = 90$. Deci $\widehat{AMB} \in 90°$. Cînd punctul O este mijlocul segmentului $[AB]$ cercul $\mathcal{C}(O', r)$ nu este determinat. Locul geometric cerut este un cerc de diametru $[AB]$ din care se scot punctele A și B.

Scanned with OKEN Scanner

142. Considerăm o dreaptă $\triangle$ care intersectează laturile unghiului $\widehat{P_1P_0P_n}$ în punctele $\{P_1'\} = \triangle \cap |P_0P_1$ și $\{P_n'\} = \triangle \cap |P_0P_n$, astfel încît $m(\widehat{P_0P_1'P_n'}) = m(\widehat{P_0P_nP_1})$. Semidreapta $|P_0P_i$ intersectează $\triangle$ în punctul P_i', oricare ar fi $i = 2, \ldots, n-1$. Se constată imediat asemănarea triunghiurilor $P_0P_iP_{i+1}$ și $P_0P_i'P_{i+1}'$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ de unde rezultă că produsul $\|P_0P_i\| \cdot \|P_0P_i'\| = k$ este același pentru orice $i = 1, \ldots, n$ și obținem

$$\|P_i'P_{i+1}'\| = k \cdot \frac{\|P_iP_{i+1}\|}{\|P_0P_i\| \cdot \|P_0P_{i+1}\|}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $P_0P_1P_n$ și $P_0P_1'P_n'$ rezultă

$$\|P_1'P_n'\| = \frac{\|P_1P_n\| \cdot \|P_0P_n'\|}{\|P_0P_1\|} = k\frac{\|P_1P_n\|}{\|P_0P_1\| \cdot \|P_0P_n\|}.$$

Pe de altă parte avem $\|P_1'P_n'\| = \sum_{i=1}^{n-1} \|P_i'P_{i+1}'\|$ de unde rezultă relația cerută.

(**G. Stoian,** G.M.F. 1957, p. 82)

149. Avem $\frac{\|T_1K\|^2}{\|T_1T_2\|^2} = \frac{r_1}{r_1+r_2}$ și $\frac{\|T_2K\|^2}{\|T_1T_2\|^2} = \frac{r_2}{r_1+r_2}$. Deci $\frac{\|T_1K\|^2}{\|T_2K\|^2} = \frac{r_1}{r_2}$. Din $\triangle O_1KM \sim \triangle O_2KN$ avem $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\|O_1M\|}{\|KN\|} = \frac{\|KM\|}{\|O_2N\|}$ sau $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\|O_1M\|}{\|O_2M\|} \cdot \frac{\|KM\|}{\|KN\|} = \frac{\|O_1M\|}{\|O_2N\|} \cdot \frac{\|KT_1\|}{\|KT_2\|}$.

Prin urmare $\frac{\|T_1K\|^4}{\|T_2K\|^4} = \frac{\|O_1M\|}{\|O_2N\|} \cdot \frac{\|KT_1\|}{\|KT_2\|}$ sau $\frac{\|T_1K\|^3}{\|T_2K\|^3} = \frac{\|O_1M\|}{\|O_2N\|}$.

150. 1) Scriind puterea punctelor A, B, C față de cerc, avem $\|AB_1\| \cdot \|AB_2\| = \|AC_1\| \cdot \|AC_2\|$ și analoagele, care apoi se înmulțesc (fig. III, 34).

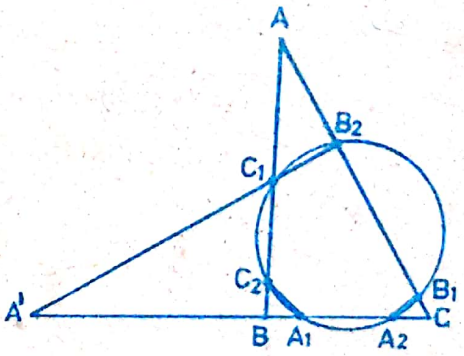


Fig. III, 34

2) Folosind aceeași figură, hexagonul înscris este $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ și să notăm $\{A'\} = A_1A_2 \cap C_1B_2$, analog definind punctele B', C'. Din teorema *Menelaus* avem $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|C_1A\|}{\|C_1B\|} \cdot \frac{\|B_2C\|}{\|B_2A\|} = 1$ și încă două egalități analoage. Prin înmulțire, ținînd seama de relația lui *Carnot*, rezultă: $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1$, adică punctele A', B', C' sînt coliniare.

151. Folosind teorema lui *Stewart*, se determină $\|AB\|$ din triunghiul OBO_1 și se ține seamă că $\|O_1B\|^2 = \|BT\|^2 - r_1^2$.

Obținem $\frac{\|BA\|}{\|BT\|} = \sqrt{\frac{r}{r+r_1}}$.

Scanned with OKEN Scanner

152. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, ortocentrul H este interior triunghiului; dacă $[BB']$ și $[CC']$ sînt înălțimile din B și C avem $\triangle BC'H \sim \triangle CB'H$; rezultă $\|HC\| \cdot \|HC'\| = \|HB\| \cdot \|HB'\|$ deci H este pe axa radicală a cercurilor de diametre $[BB']$, $[CC']$; la fel se arată că este pe încă una din celelalte două axe radicale. Dacă triunghiul este obtuzunghic, ortocentrul este exterior triunghiului, dar demonstrația se păstrează. Dacă triunghiul este dreptunghic, ortocentrul este vîrful unghiului drept care este totodată centrul radical al celor trei cercuri, avînd puterea zero față de fiecare.

(A.V. Mihai)

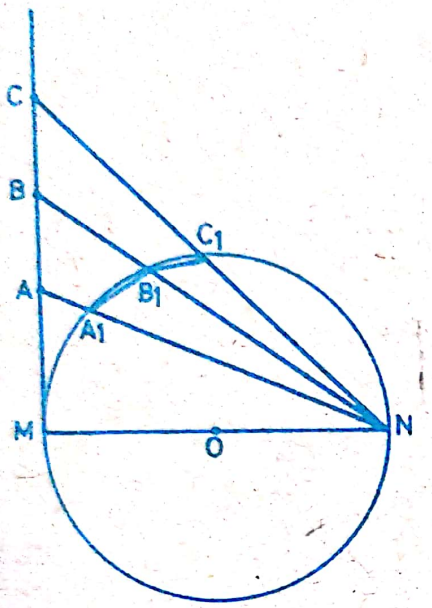


Fig. III, 35

153. Avem $\triangle ABN \sim \triangle A_1B_1N$ și $\triangle BCN \sim \triangle B_1C_1N$ deoarece

$$m(\widehat{MCN}) = \frac{m(\widehat{C_1N})}{2} = m(\widehat{NB_1C_1})$$

și

$$m(\widehat{MBN}) = \frac{m(\widehat{B_1C_1N})}{2} = m(\widehat{B_1A_1N})$$

(fig. III, 35).

Deci $\frac{\|AB\|}{\|A_1B_1\|} = \frac{\|NB\|}{\|NA_1\|}$ și $\frac{\|BC\|}{\|B_1C_1\|} = \frac{\|NB\|}{\|NC_1\|}$.

Înmulțind membru cu membru obținem (1) $\|A_1B_1\| \cdot \|NC_1\| = \|B_1C_1\| \cdot \|NA_1\|$; patrulaterul $A_1B_1C_1N$ fiind inscriptibil și avînd proprietatea (1) rezultă că tangentele în A_1 și C_1 se intersectează pe B_1N.

154. Avem $KP \perp NL$ deoarece $m(\widehat{KPL}) = \frac{m(\widehat{KL})}{2} = 90$.

Triunghiul KNP este dreptunghic și cum $|KM| \equiv |MN|$ rezultă că $|KM| \equiv |MP|$. Triunghiul KMP este deci isoscel. În particular $\widehat{MKP} \equiv \widehat{MPK}$ și cum KM este tangentă la cerc, rezultă că și MP este tangentă.

155. Fie E, F, G, H punctele de tangență. Avem $|AH| \equiv |AK| \equiv |AE|$, $|CH| \equiv |CG|$, $|DF| \equiv |DE|$, $|BF| \equiv |BK| \equiv |BG|$. Adunînd convenabil avem $\|AH\| + \|CH\| + \|BF\| + \|DF\| = \|AE\| + \|CG\| + \|BG\| + \|DE\|$ sau $\|AC\| + \|BD\| = \|CB\| + \|DA\|$.

156. Fie M, N, P mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului ABC și fie ca în figură EFG triunghiul determinat de tangentele la cerc în A, B, C. Notînd cu O centrul cercului circumscris, mediatoarele triunghiului ABC sînt dreptele OE, OF, OG (fig. III, 36) și ele sînt perpendiculare respectiv pe laturile $|PN|$, $|PM|$, $|MN|$ ale triunghiului PMN. Triunghiurile PMN și EFG sînt ortologice. O proprietate referitoare la triunghiuri ortologice este următoarea: dacă perpendicularele duse din vîrfurile

Scanned with OKEN Scanner

unui triunghi pe laturile altui triunghi sînt concurente, atunci proprietatea este simetrică (*Steiner* 1878, v. *N. N. Mihăileanu*, „Lecţii complementare de geometrie" E.D.P. 1976, p. 40). În cazul nostru perpendicularele din vîrfurile triunghiului EFG pe laturile lui PMN sînt concurente, de unde rezultă că şi perpendicularele din M, N, P pe tangentele FG, GE, EF vor fi concurente.

(A.V. Mihai)

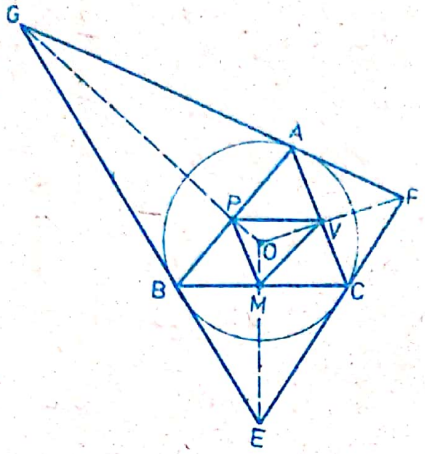


Fig. III, 36

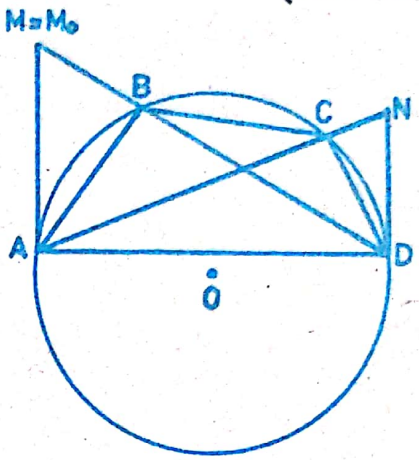


Fig. III, 37

157. Se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunînd că tangentele la $\mathcal{C}(O, r)$ în A şi C intersectează diagonala $[BD]$ în M şi M_0 respectiv, se arată că

$$\frac{\| CD \|^2}{\| BC \|^2} = \frac{\| DM \|}{\| MB \|} \text{ şi } \frac{\| AD \|^2}{\| AB \|^2} = \frac{\| DM_0 \|}{\| M_0B \|}. \text{ Dar } \frac{\| CD \|^2}{\| BC \|^2} = \frac{\| AD \|^2}{\| AB \|^2}$$

şi deci $M = M_0$ (fig. III, 37).

158. Cercul circumscris triunghiului AMN are aceeaşi tangentă în A ca şi $\mathcal{C}(O, r)$ deci este tangent interior cercului $\mathcal{C}(O, r)$; rezultă $\| SM \| \cdot \| SN \| = \| SA \|^2 = \| SQ \| \cdot \| SP \|$ (fig. III, 38).

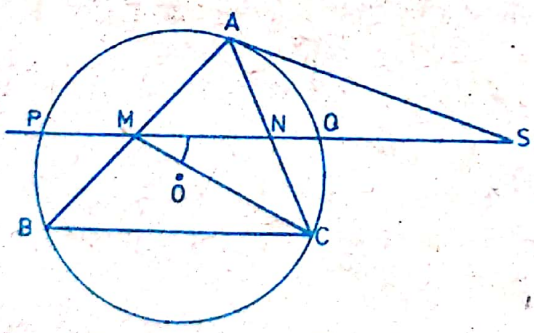


Fig. III, 38

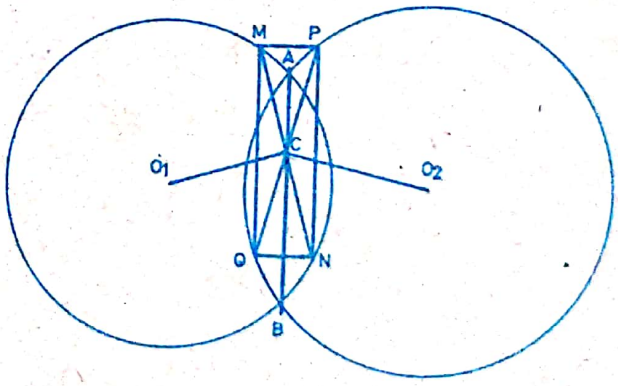


Fig. III, 39

159. Dacă $[MN]$ este cea mai mică coardă în $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $[PQ]$ este cea mai mică coardă în $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ atunci $O_1C \perp MN$ şi $O_2C \perp PQ$ şi avem $|MC| = |CN|$, $|PC| = |CQ|$. Rezultă că $MPNQ$ este paralelogram.
Dar $\| CM \| \cdot \| CN \| = \| AC \| \cdot \| CB \| = \| CP \| \cdot \| CQ \|$ de unde $\| CM \| = \| CP \|$ (fig. III, 39).

Scanned with OKEN Scanner

160. Notăm cu x lungimea razei căutate. Considerăm triunghiurile dreptunghice O_1O_3A și O_2O_3A care au cateta comună $[O_3A]$. Aplicînd teorema lui *Pitagora* avem (fig. III, 40),

$$\|O_3A\|^2 = \|O_1O_3\|^2 - \|O_1A\|^2 = \|O_2O_3\|^2 - \|O_2A\|^2, \text{ sau}$$

$$(R + x)^2 - (R + 2r - x)^2 = (r + x)^2 - (x - r)^2.$$

Rezolvînd această ecuație obținem: $x = \frac{r}{R}(R + r)$. Celelalte două cercuri au razele $R + r$ și $\frac{r}{R}(R + r)$.

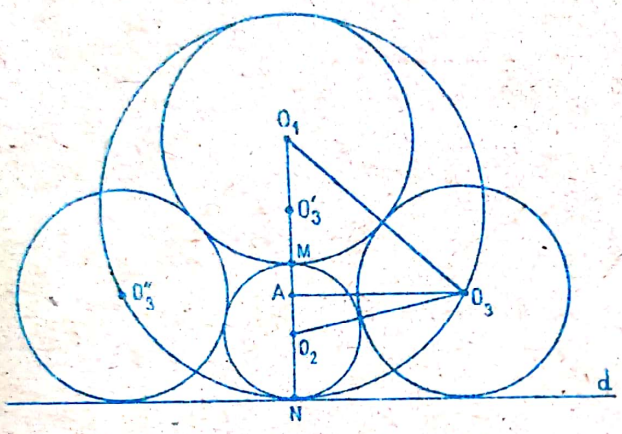


Fig. III, 40

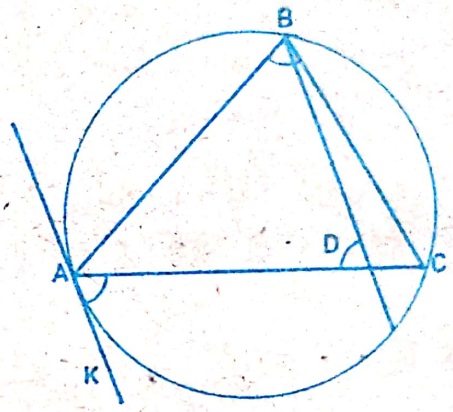


Fig. III. 41

163. 1) Avem $m(\widehat{ACC_1}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} = m(\hat{B})$ de unde rezultă că

$$m(\widehat{BAC}) = 180 - (m(\hat{B}) + m(\widehat{BCA})) = 180 - m(\hat{B}) - (m(\widehat{BCC_1}) -$$

$$- m(\widehat{ACC_1})) = 180 - m(\hat{B}) - (90 - m(\hat{B}) - m(\hat{B})) = 90 + m(\hat{B}).$$

2) Triunghiurile dreptunghice BCC_1 și ACC_1 sînt asemenea căci $\widehat{ACC_1} \equiv \hat{B}$. Rezultă că $\frac{\|BC_1\|}{\|CC_1\|} = \frac{\|CC_1\|}{\|AC_1\|}$.

164. Fie AK tangenta la cerc în A. Avem $m(\widehat{DAK}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} =$

$= m(\widehat{ABC})$, $\widehat{KAD} \equiv \widehat{BDA}$ (unghiuri alterne interne) așa că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BDA}$. Triunghiurile ABC și ABD au unghiul $\hat{A}$ comun iar unghiurile $\widehat{ABC}$ și $\widehat{BDA}$ congruente (fig. III, 41). Fiind așadar asemenea, avem:

$$\frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \frac{\|AB\|}{\|AD\|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

166. OB, O_1C și PQ sînt paralele, fiind perpendiculare pe BS. Avem $\triangle ASQ \sim \triangle AO_1C$ și $\triangle ASP \sim \triangle ABO$ (fig. III, 42). Dar triunghiurile OAB și O_1AC sînt isoscele, prin urmare și triunghiurile ASQ și ASP sînt isoscele. Rezultă că $|SP| = |SA| = |SQ|$.

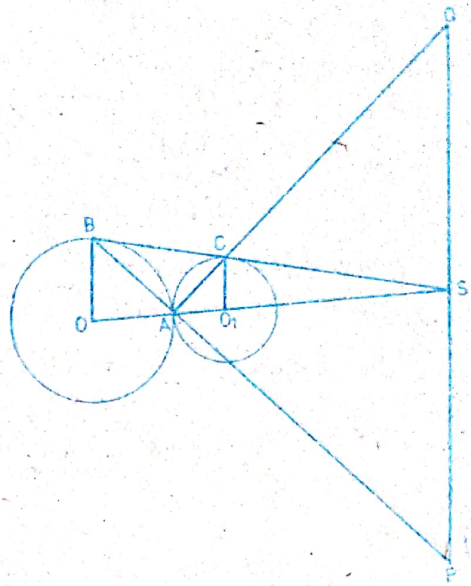


Fig. III, 42

167. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ avem relația: $\|AC\| \cdot \|BD\| = \|AB\| \cdot \|CD\| + \|BC\| \cdot \|AD\|$ (1). Dar $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD}$ și deci $|AC| = |BD|$; de asemenea $|AB| = |BC| = |CD|$ și (1) devine $\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AB\| \cdot \|AD\|$.

168. Fie K punctul de tangență al cercurilor $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și P piciorul perpendicularei din O_2 pe OO_1 (fig. III, 43). Notînd $\|KP\| = x$ avem $\|AB\| = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ (1). Numărul x este soluție a ecuației $(R + r)^2 - (r + x)^2 = (R + r_1)^2 - (r_1 - x)^2$. Rezolvînd ecuația avem: $x = \dfrac{r - r_1}{r + r_1} R$. Substituind în (1) avem $\|AB\| = \dfrac{4\sqrt{rr_1}}{r + r_1} \cdot R$.

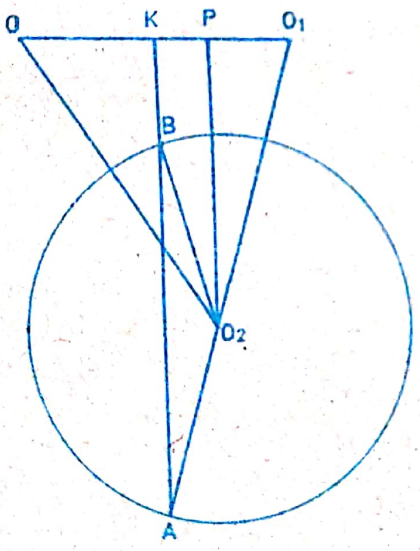


Fig. III, 43

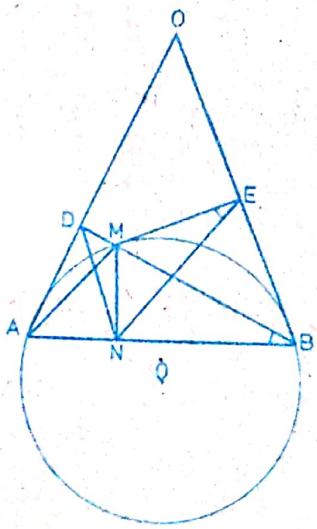


Fig. III, 44

169. Demonstrăm că triunghiurile DMN și NME sînt asemenea. Observăm că patrulaterele $ADMN$ și $NMEB$ sînt inscriptibile deoarece $m(\widehat{MNA}) + m(\widehat{ADM}) = 90 + 90 = 180$ și $m(\widehat{MEB}) + m(\widehat{BNM}) = 90 + 90 = 180$. De aceea $\widehat{MND} = \widehat{MAD}$ și $\widehat{MEN} = \widehat{MBN}$. Dar $m(\widehat{MAD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AM})}{2} = m(\widehat{MBN})$. Astfel $\widehat{MND} = \widehat{MEN}$ (fig. III, 44).

Scanned with OKEN Scanner

Analog se arată că $\widehat{NDM} \equiv \widehat{ENM}$.
Din asemănarea triunghiurilor DMN și NME avem:

$$\frac{\|DM\|}{\|MN\|} = \frac{\|MN\|}{\|ME\|}.$$

170. Fie $\mathcal{C}(O_3, r)$ cercul căutat și $O_3D \perp O_1O_2$, $D \in O_1O_2$. Avem:

$$\|OO_3\|^2 = \|O_1O_3\|^2 + \|O_1O\|^2 - 2\|O_1O\| \cdot \|O_1D\| = \quad (1)$$
$$= \|O_2O_3\|^2 + \|OO_2\|^2 - 2\|OO_2\| \cdot \|DO_2\| \quad (1)'.$$

Notăm $\|O_1D\| = x$ și ținem seama că $\|O_1O_3\| = a + r$, $\|O_2O_3\| = b + r$, $\|O_1O\| = (a + b) - a = b$, $\|OO_2\| = (a + b) - b = a$. Relația (1)' devine $(a + r)^2 + b^2 - 2bx = (b + r)^2 + a^2 - 2a(a + b - x)$, de unde obținem

$$x = a + \frac{a - b}{a + b} r.$$

Relația (1) devine acum:

$$(a + b - r)^2 = (a + r)^2 + b^2 - 2b\left(a + \frac{a - b}{a + b} r\right).$$

Rezolvînd această ecuație avem:

$$r = \frac{ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}.$$

171. Arătăm că oricare două segmente $|O_1A_1|$, $|O_2A_2|$, $|O_3A_3|$ se intersectează în părți congruente, ceeace ne asigură că aceste segmente se intersectează într-un singur punct. Deoarece cele trei cercuri sînt congruente rezultă că $O_2A_1O_3O$ și $O_1A_2O_3O$ sînt romburi. Deci segmentele $|O_2A_1|$, $|OO_3|$ și $|O_1A_2|$ sînt paralele și congruente. Rezultă că $O_1A_2A_1O_2$ este paralelogram și deci diagonalele sale $|O_1A_1|$ și $|O_2A_2|$ se intersectează în părți congruente. La fel pentru celelalte perechi de segmente.

172. Avem $|BM| \equiv |MK|$ și $|KN| \equiv |NC|$ deci $\|MN\| = \|BM\| + \|CN\|$ (1). Dar $\|MN\| < \|AM\| + \|AN\|$, prin urmare $2\|MN\| < \|BM\| + \|AM\| + \|CN\| + \|AN\| = \|AB\| + \|AC\|$. Pe de altă parte $\|MN\| > \|AN\|$ și $\|MN\| > \|AM\|$ căci $\widehat{BAC}$ este optuz. Rezultă că $2\|MN\| > \|AN\| + \|AM\|$ și ținînd seama de (1) avem:

$$3\|MN\| > \|AN\| + \|NC\| + \|AM\| + \|MB\| = \|AB\| + \|AC\|.$$

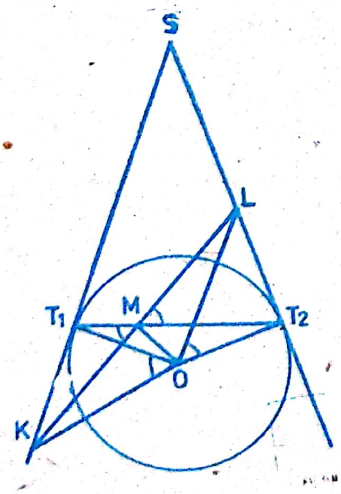


Fig. III, 45

173. Aplicînd axioma de separare a planului rezultă că sau $K \in |ST_1|$ sau $K \in |ST_2|$. Considerăm cazul din fig. III, 45. Patrulaterele T_1KOM și $OMLT_2$ sînt inscriptibile, deoarece $m(\widehat{LT_2O}) = m(\widehat{LMO}) = m(\widehat{OMK}) = m(\widehat{OT_1K}) = 90$. Rezultă că $\widehat{LOT_2} \equiv \widehat{LMT_2}$, $\widehat{KMT_1} \equiv \widehat{KOT_1}$; dar $\widehat{KMT_1} \equiv \widehat{LMT_2}$ fiind opuse la vîrf.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\widehat{LOT_2} \equiv \widehat{KOT_1}$. Cum $|OT_1| \equiv |OT_2|$ și $\widehat{OT_1K} \equiv \widehat{OT_2L}$ rezultă că $\triangle T_1KO \equiv \triangle T_2OL$, și astfel OKL este isoscel. Deducem că $|MO|$ este mediană în OKL.

174. Avem $\|BD\| \cdot \|CD\| = \|DM\| \|DN\| = \|AM\|^2 - \|AD\|^2$ de unde $\|AD\|^2 + \|BD\| \|CD\| = \|AM\|^2$.

175. Considerăm $M \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$ (fig. III, 46). Fie $|BC|$ diametru în $\mathcal{C}(O, r)$, N și K picioarele perpendicularelor din M pe AS și BS respectiv. Avem $\triangle AMN \sim \triangle ABC \sim \triangle MBK$ deoarece $m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{NAM})$ și $m(\widehat{KBM}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$. Rezultă că

$$\frac{1}{m} = \frac{\|BC\|^2}{\|AM\|(\|BM\| + \|MA\|)}, \quad \frac{1}{n} = \frac{\|BC\|}{\|MB\|(\|AM\| + \|MB\|)},$$

de unde $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{\|BC\|}{\|AM\| \cdot \|MB\|}$. Analog, cînd $M \in \text{Ext}\, \mathcal{C}(O, r)$.

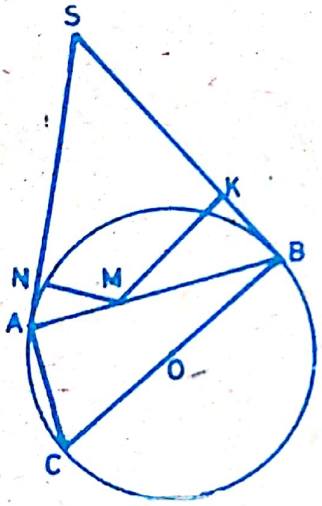


Fig. III, 46

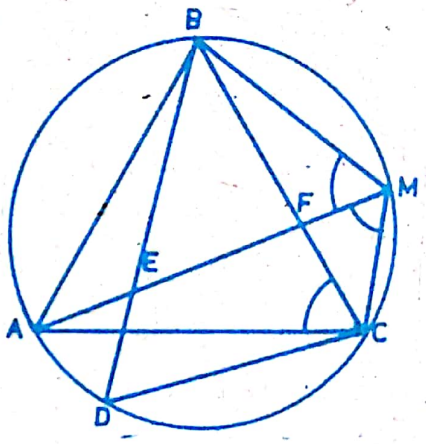


Fig. III, 47

176. Tangentele la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ în B și D se intersectează pe AC sau sînt paralele cu AC dacă și numai dacă $\|AD\| \|BC\| = \|AB\| \cdot \|CD\|$.

177. Fie $BD \parallel CM$, $D \in \mathcal{C}(O, r)$ și notăm $\{E\} = BD \cap AM$. Arătăm că $|MB| \equiv |ME|$. Avem $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = 60$. Dreptele paralele CM și DB tăiate de secanta AM determină unghiurile congruente $\widehat{MEB}$ și $\widehat{CMA}$ astfel că $m(\widehat{MEB}) = m(\widehat{CMA}) = 60$. Rezultă că $|MB| \equiv |ME|$. Arătăm acum că $|MC| \equiv |EA|$ (fig. III, 47). Triunghiul EAD este echilateral căci $\widehat{DEA} \equiv \widehat{MEB}$ (opuse la vîrf), $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB}) = 60\left(= \frac{m(\widehat{AB})}{2}\right)$, $m(\widehat{DAE}) = 180 - m(\widehat{ADE}) - m(\widehat{DEA}) = 60$. Rezultă că $|DE| \equiv |AE|$. Patrulaterul $EDCM$ este paralelogram și rezultă că $|CM| \equiv |DE| \equiv |EA|$. În final $\|AM\| = \|AE\| + \|EM\| = \|CM\| + \|MB\|$.

Scanned with OKEN Scanner

178. Din triunghiul dreptunghic ABD $(BD \parallel O_1O_2)$ avem $\| AB \|^2 = \| BD \|^2 - \| AD \|^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$ (fig. III, 48). Tangenta la cercuri în C intersectează pe AB în E. Avem $\| AE \| = \| EC \| = \| EB \| = \sqrt{r_1r_2}$. Atunci $\triangle O_1AE \equiv \triangle O_1EC$ și deci $\widehat{AO_1E} \equiv \widehat{CO_1E}$. Rezultă că $\triangle O_1AF \sim \triangle O_1EC$. Putem scrie $\dfrac{\| AF \|}{\| AO_1 \|} = \dfrac{\| EC \|}{\| O_1E \|}$. Dar $\| AO_1 \| = r_1$, $\| EC \| = \sqrt{r_1r_2}$, $\| O_1E \| = \sqrt{\| O_1C \|^2 + \| CE \|^2} = \sqrt{r_1^2 + r_1r_2}$ și $\| AF \| = \| AO_1 \| \cdot \dfrac{\| EC \|}{\| O_1E \|} = \dfrac{r_1\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1^2 + r_1r_2}} = r_1\sqrt{\dfrac{r_2}{r_1 + r_2}}$.

Apoi $\| AC \| = 2\| AF \| = 2r_1\sqrt{\dfrac{r_2}{r_1 + r_2}}$. Analog obținem:

$$\| BC \| = 2r_2\sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}.$$

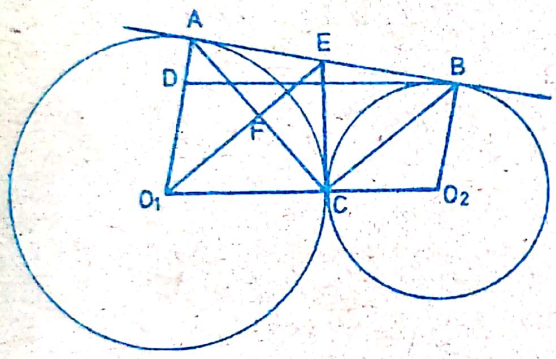


Fig. III, 48

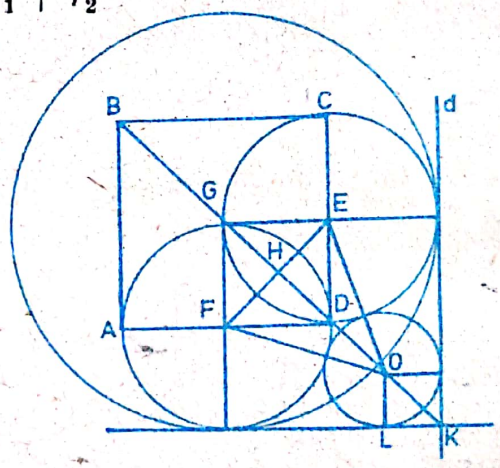


Fig. III, 49

180. Sînt două cercuri. Unul este $\mathcal{C}(G, 2a)$. Fie $\mathcal{C}(O, x)$ celălalt cerc căutat (fig. III, 49). Din triunghiul dreptunghic EHO avem:

$$\| EO \|^2 = \| EH \|^2 + \| HO \|^2 = \| EH \|^2 + (\| KG \| - \| GH \| - \| OK \|)^2 \quad (1).$$

Dar $\| EO \| = a + x$, $\| EH \| = \dfrac{1}{2}\| EF \| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$\| KG \| = 2\| EF \| = 2\sqrt{2}a, \quad \| GH \| = \frac{1}{2}\| EF \| = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\| OK \| = \sqrt{\| OL \|^2 + \| LK \|^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}.$$

Egalitatea (1) devine:

$$(a + x)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}a - \frac{a\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}x\right)^2.$$

Rezolvăm această ecuație în raport cu x și avem $x = 2(2 - \sqrt{3})a$.

Scanned with OKEN Scanner

181. Pentru a demonstra că hexagonul $MNPQRS$ este inscriptibil este suficient să arătăm că orice patru vîrfuri consecutive ale sale sînt pe un cerc. Triunghiul fiind ascuțitunghic picioarele înălțimilor sînt pe laturi. Avem: $A_1 \in |BC| \Rightarrow |AB$ și $|AC$ sînt în semiplane opuse față de AA_1; C_1, B_1 sînt în semiplane opuse față de $AA_1 \Rightarrow$ paralelele C_1M și B_1M la AA_1 sînt în semiplanele opuse față de $AA_1 \Rightarrow A_1 \in |MN|$. Analog $B_1 \in |PQ|$ și $C_1 \in |RS|$. Există două tipuri de grupe de cîte patru vîrfuri consecutive ale hexagonului $MNPQRS$ (fig. III, 50): în primul tip, patrulaterele $RSMN$, $MNPQ$ și $PQRS$ cu al doilea și al treilea vîrf pe laturi diferite ale triunghiului, iar în al doilea tip, patrulaterele $NPQR$, $QRSM$, $SMNP$ cu al doilea și al treilea vîrf pe o aceeași latură a triunghiului ABC. Arătăm inscriptibilitatea pentru cîte un patrulater din fiecare tip și anume $RSMN$ și $NPQR$. Din proporționalitatea $\frac{\|BC_1\|}{\|BR\|} = \frac{\|BH\|}{\|BB_1\|} = \frac{\|BA_1\|}{\|BN\|}$ rezultă că $NR \parallel A_1C_1$. De aceea $\widehat{MNR} \equiv \widehat{BA_1C_1} \equiv \widehat{BAC} = \widehat{BSM}$. Rezultă că $m(\widehat{MNR}) + m(\widehat{MSR}) = 90$ și deci R, S, M, N sînt pe un cerc. Apoi $m(\widehat{PNR}) + m(\widehat{PQR}) = 180 - (m(\widehat{PNC}) + m(\widehat{BNR})) + 180 - m(\widehat{AQR}) = 2 \cdot 180 - (m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACB})) = 180$ de unde rezultă că N, P, Q, R sînt pe un cerc. Demonstrăm că $SM \parallel AC$. Avem $\triangle BA_1A \sim \triangle BC_1C$, deci $\frac{\|BA\|}{\|BC_1\|} = \frac{\|AB\|}{\|BC\|}$.

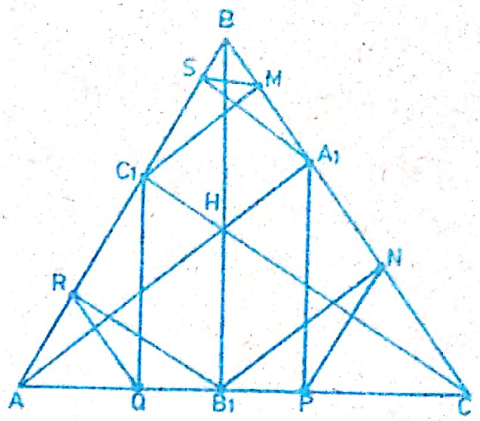


Fig. III, 50

Rezultă că $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ și $\widehat{BA_1C_1} = \widehat{BAC}$. În $\triangle A_1BC_1$ segmentele $|A_1S|$ și $|C_1M|$ sînt înălțimi. Conform raționamentului de mai sus avem $\widehat{BSM} \equiv \widehat{BA_1C_1}$ adică $\widehat{BSM} \equiv \widehat{BAC}$ și deci $SM \parallel AC$. Analog se arată că $PN \parallel AB$ și $RQ \parallel BC$.

182. $x = 4Rr\frac{R-r}{(R+r)^2}$.

183. Arătăm mai întîi că dacă dreapta AB nu intersectează cercul, atunci există două tangente, una din A și una din B, care se intersectează (ca segmente). Fie $h = AT_1$, $k = AT_2$ tangentele din A, $h' = BU_1$, $k' = BU_2$ tangentele din $B(T_1, T_2, U_1, U_2 \in \mathcal{C})$ (fig. III, 51). Cum $AB \cap \mathcal{C} = \emptyset \Rightarrow B$ nu aparține interiorului unghiului k și nici interiorului opusului său la vîrf. Deci $B \notin |hT_2$ sau $B \notin kT_1$; să presupunem că $B \notin |kT_1$; cum $\mathcal{C} \subset \text{Int}\,\widehat{hk} \Rightarrow U_1 \in kT_1$. Rezultă $|BU_1| \cap k \neq \emptyset$, adică $|BU_1| \cap AT_2 = \emptyset$. Analog $|AT_2| \cap BU_1 = \emptyset$ și deci tangentele $|AT_2|$ și $|BU_1|$ se intersectează. Așadar, revenind la notațiile din enunț putem de la bun început considera tangentele $|AC|$ și $|BD|$ că se intersectează și fie $|AC| \cap |BD| = \{M\}$.

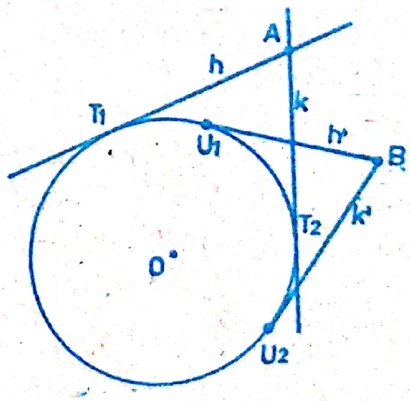


Fig. III, 51

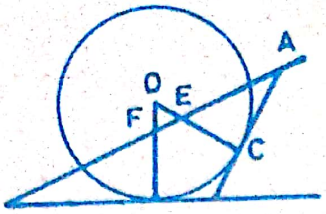


Fig. III, 52

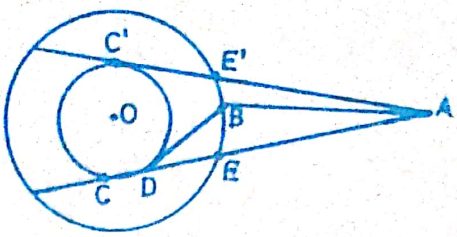


Fig. III, 53

În $\triangle AMB$ avem $|\,\|AM\| - \|BM\|\,| < \|AB\| < \|AM\| + \|BM\|$. Dar $\|AC\| > \|AM\|$, $\|BD\| > \|BM\|$ și $\|MC\| = \|MD\|$. Deci $|\,\|AC\| - \|BD\|\,| < \|AB\| < \|AC\| + \|BD\|$. Dacă $AB \cap \mathcal{C}(O, r) = \emptyset$, atunci sînt posibile două cazuri:

1) Int $\mathcal{C}(O, r) \cap AB \subset |AB|$ (fig. III, 52). În acest caz avem $\|AC\| + \|BD\| < \|AE\| + \|BF\| < \|AB\|$ deoarece ipotenuzele $|AE|$ și $|BF|$ în triunghiurile dreptunghice AEC și BFD sînt mai mari decît catetele $|AC|$ și $|BD|$.

2) $[AB] \subset$ Int $\widehat{CAC'}$ (fig. III, 53). Cercul cu centrul în O și care trece prin B intersectează pe AC și AC' în E și E'. Atunci $|EC| = |BD|$ și deci $\|AB\| < \|AE\| = \|AC\| - \|EC\| = \|AC\| - \|ED\|$.

184. Fie D punctul în care se mai intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$ și $BA'C'$ (fig. III, 54). Avem $m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{B'DC'}) = 180$ și $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{A'DC'}) = 180$, fiind unghiuri opuse în patrulaterele inscriptibile. Cum $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{A'DB}) + m(\widehat{A'DC'}) + m(\widehat{B'DC'}) = 540$ rezultă că

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{A'DC'}) = 180$$

$$m(\widehat{BCA}) + (\widehat{A'DB'}) = 180$$

adică patrulaterul $A'CB'D$ este inscriptibil. Rezultă că și cel de-al treilea cerc trece prin D.

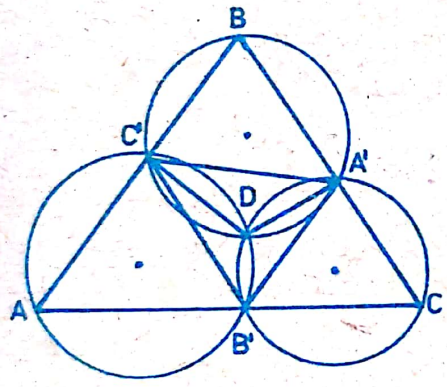


Fig. III, 54

185. Fie $\mathcal{C}(O', r')$ cercul înscris în pătrat (fig. III, 55) și fie $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ tangentele la acest cerc. Avem $|A'C'| \subset |AC|$ și $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ de unde rezultă că $\frac{r'}{r} = \frac{\|A'C'\|}{\|AC\|} < 1$. Deci $2r' < 2r$. Fie $\mathcal{C}(O'', r'')$ cercul circumscris pătratului (fig. III, 56) și fie $A''B'' \parallel AB$, $A''C'' \parallel AC$, $B''C'' \parallel BC$.

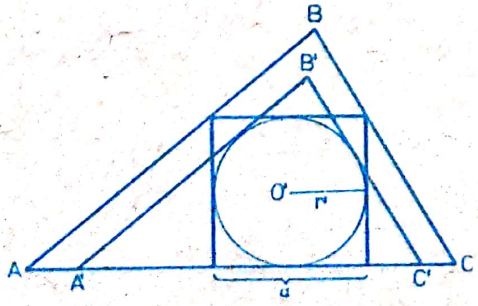


Fig. III, 55

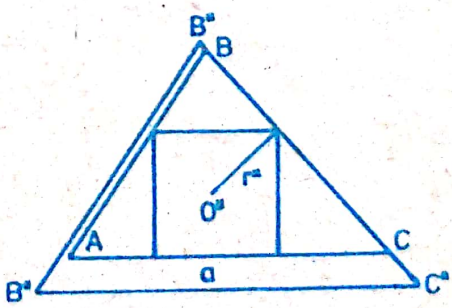


Fig. III, 56

Avem $|AC| < |A''C''|$ și $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ deci $\frac{r''}{r} = \frac{\|A''C''\|}{\|AC\|} > 1$. Rezultă că $a = \sqrt{2}r'' > \sqrt{2}r$.

186. Fie $\{C_1\} = AD \cap CE$ (fig. III, 57). În patrulaterul $ABDC$ avem $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DCA}) = 180$ și deci A, B, C, D sînt pe un cerc $\mathcal{C}$; deoarece $\widehat{ABD} \in 90°$ rezultă că diametrul cercului este $|AD|$; în triunghiul ACD înălțimea $|CC_1|$ cade pe ipotenuză deci $C_1 \in |AD| \subset \text{Int}\, \mathcal{C} \Rightarrow$ dreapta CC_1 este secantă și fie F al doilea punct de intersecție al acestei drepte cu cercul. Deoarece $CE \perp AD$ rezultă că $\overset{\frown}{DC} \equiv \overset{\frown}{DF}$ și de aici deducem ușor că triunghiul ACF este isoscel. De asemenea, avem $\overset{\frown}{ABC} \equiv \overset{\frown}{AFC}$. Mai avem că $\overset{\frown}{AFC} \equiv \overset{\frown}{ACF}$. Rezultă că $\overset{\frown}{ABC} \equiv \overset{\frown}{AFC}$. Cum unghiul $\hat{A}$ este comun triunghiului ACE și ABC rezultă $\triangle ACE \sim \triangle ABC$.

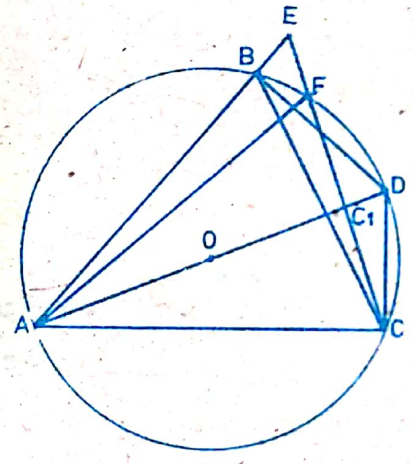


Fig. III, 57

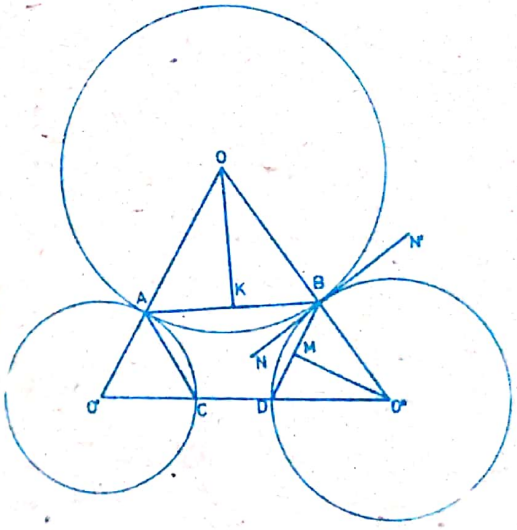


Fig. III, 58

187. Construim $OK \perp AB$, $O''M \perp BD$, $BN \perp OO''$ (fig. III, 58). Avem $m(\widehat{ABN}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$, $m(\widehat{DBN}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2}$, $m(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{O'OO''}) +$ $+ m(\widehat{OO''O'}))$ (1); $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{OO'O''}) + m(\widehat{O'AC})$, fiind unghi exterior triunghiului ACO'. Dar $m(\widehat{O'AC}) = 90 - \frac{1}{2} m(\widehat{OO'O''})$ și deci $m(\widehat{ACD}) =$ $= 90 + \frac{1}{2} m(\widehat{OO'O''})$. Rezultă că $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ACD}) = 90 + \frac{1}{2}(m(\widehat{O'OO''}) +$ $+ m(\widehat{OO''O'}) + m(\widehat{OO'O''})) = 180$.

188. Patrulaterele $BDHF$, $CEHD$ și $AFHE$ sînt inscriptibile. Avem deci, $\|AD\| \|AH\| = \|AB\| \|AF\| = \|AC\| \|AE\|$, $\|BE\| \|BH\| =$ $= \|BC\| \|BD\| = \|BA\| \|BF\|$ și $\|CF\| \|CH\| = \|CA\| \|CE\| =$ $= \|CB\| \|CD\|$.

Adunînd aceste egalităţi avem:
$2(\|AD\|\|AH\|+\|BE\|\|BH\|+\|CF\|\|CH\|)=\|AB\|\|AF\|+$
$+\|BC\|\|BD\|+\|CA\|\|CE\|+\|AC\|\|AE\|+\|BA\|\|BF\|+$
$+\|CB\|\|CD\|=\|AB\|(\|AF\|+\|BF\|)+\|BC\|(\|BD\|+$
$+\|CD\|)+\|CA\|(\|CE\|+\|AE\|)=\|AB\|^2+\|BC\|^2+\|AC\|^2.$
Dacă unghiul $\hat{A}$ este optuz în faţa termenului $\|AD\|\|AM\|$ se pune — în loc de + .

189. Notăm $a=\|AM\|$ şi $b=\|BM\|$. Rezultă $2\|OM\|=a+b$, $\|MT\|=\sqrt{ab}$ şi $\|MN\|=\frac{\|MT\|^2}{\|OM\|}=\frac{2ab}{a+b}$. Evident că avem $\|MN\|<$ $<\|MT\|<\|MO\|$ deci $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ adică media armonică este mai mică decît media geometrică şi aceasta din urmă mai mică decît media aritmetică.

(N.N. Mihăileanu, R.M.T. 1946, p. 7)

190. Împărţim pătratul în n^2 pătrate congruente de latură $\frac{1}{n}$, ducînd segmentele paralele cu laturile pătratului. Există cel puţin un pătrat de latură $\frac{1}{n}$ care conţine în interiorul sau pe laturi cel puţin trei puncte, căci în caz contrar am avea mai puţin de $2n^2+1$ puncte. Construim cercul cu centrul în centrul acestui pătrat şi avînd raza $\frac{1}{n}$.

191. Fie $C\in\mathcal{C}(O,r)$, $C\notin$ Int $\widehat{AOB}$ astfel încît $m(\widehat{BOC})=90$. Apoi construim $B_1\in\widehat{ABC}$ astfel încît $m(\widehat{COB_1})=13\times 7=91$. Rezultă că $m(\widehat{BOB_1})=1$. Celelalte puncte B_2, B_3, ... B_{12} se găsesc uşor.

192. 1) Rezultă uşor că $STUV$ este patrulater inscriptibil. 2) Dacă $\{I\}=CN\cap BM$ rezultă $m(\widehat{BIC})=90-\frac{m(\hat{A})}{2}$ şi $m(\widehat{VIU})=90-\frac{m(\hat{A})}{2}$.

Cum $m(\hat{A})<90$ rezultă $\frac{m(\hat{A})}{2}<45$ şi deci $90-\frac{m(\hat{A})}{2}>45$. În triunghiurile SIT şi VIU avem $\|TS\|>\|SI\|$ şi $\|VU\|>\|VI\|$ deoarece se opun la unghiuri mai mari. Rezultă că $\|TS\|+\|VU\|>\|SI\|+\|VI\|>\|SV\|$.

(Laura Constantinescu, GM-B 4/1976)

193. Se demonstrează că patrulaterele $AB'C'P$ şi $AC'PM$ sînt inscriptibile şi cum acestea au trei puncte comune rezultă concluzia. Avem mai multe situaţii particulare. De exemplu dacă considerăm cazul cînd M coincide cu A, iar P este un punct pe latura $|BC|$, atunci se obţine următoarea proprietate: Fie P un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC. Tangenta în P la cercul circumscris triunghiului APB intersectează AC în B' şi tangenta în P la cercul circumscris triunghiului APC intersectează AB în C'. Atunci punctele A, P, B' şi C' sînt situate pe un cerc tangent cercului circumscris triunghiului ABC în punctul A.

(N.N. Mihăileanu, R.M.T. 1937, p. 3)

Scanned with OKEN Scanner

194. 1) AP, $B'Q$ şi BC sînt axele radicale ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, $AB'C'$ şi $BB'C$, cercuri luate două cîte două. Aceste drepte sau se intersectează sau sînt paralele. În cazul că sînt concurente punctul de intersecţie este centrul radical al celor trei cercuri, îl notăm cu I, deci $I \in BC$. Considerînd apoi cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, $AB'C'$ şi $BC'C$ rezultă la fel că AP, $C'R$ şi BC sînt concurente sau paralele. Punctul de concurenţă este acelaşi punct $I \in BC$. 2) Dreapta BQ intersectează cercul circumscris triunghiului $AB'C'$ în A' sau este tangentă la acest cerc în Q. În primul caz rezultă $\widehat{A'AB'} \equiv \widehat{A'QB'} \equiv \widehat{B'CB}$ deci $AA' \parallel BC$. Se arată la fel că CR trece prin punctul A'.

(N.N. Mihăileanu, G.M. 1935, p. 372)

195. Perimetrul triunghiului $O_1O_2O_3$ rste $2(r_1 + r_2 + r_3)$ iar suma lungimilor cercurilor este $2\pi(r_1 + r_2 + r_3)$, deci raportul cerut este π.

197. Considerăm că P se află pe arcul $\overset{\frown}{BDC}$ (fig. III, 59) şi să notăm cu E şi M proiecţiile lui A, respectiv O pe BP. Folosind teorema lui *Pitagora* generalizată în ABP obţinem (1) $\| PA \|^2 - l^2 = 2 \| PB \| \cdot \| EM \|$. Aplicînd din nou teorema lui *Pitagora* generalizată în AOP rezultă (2) $\| PA \|^2 - l^2 = 4r \| HG \|$ unde $\{H\} = BC \cap AD$ şi G este proiecţia lui P pe AD. Pe de altă parte mai rezultă (3) $\| BP \| \| PC \| = 2r \| GH \|$. Din (1) (2) şi (3) rezultă $\| EM \| = \| PC \|$. Cazul cînd P este pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ se tratează analog.

(I. Buzatu, G.M. 12/1978)

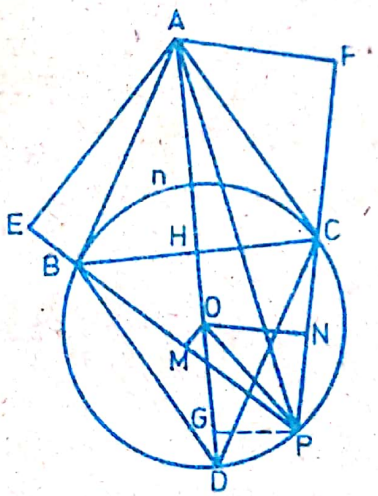


Fig. III, 59

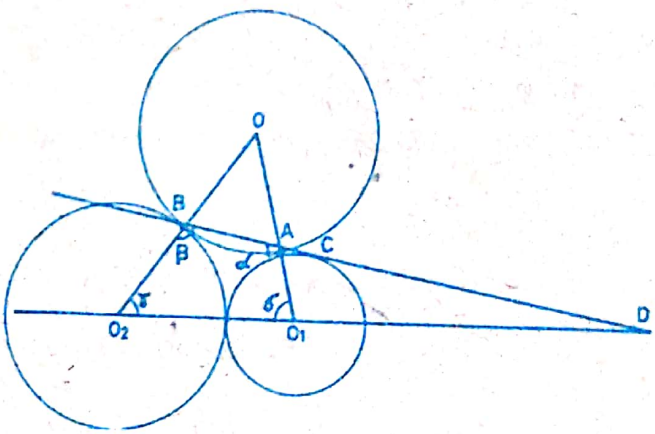


Fig. III, 60

198. Presupunem $R_2 > R_1$. Dreapta AB nu este paralelă cu O_1O_2 căci din teorema *Thales* în triunghiul OO_1O_2 ar rezulta $R_1 = R_2$, fals. Fie $AB \cap O_1O_2 = \{D\}$. Dreapta AB taie laturile $|OO_1|$ şi $|OO_2|$ ale triunghiului OO_1O_2, deci nu va tăia latura $|O_1O_2|$, adică $D \notin |O_1O_2|$. (fig. III, 60). Dreapta AB intersectează cercul $\mathcal{C}_1$, dar nu poate fi tangentă căci am avea $m(\widehat{AOB}) = 90 \Rightarrow m(\widehat{OAB}) > m(\widehat{OBA})$ fals, deoarece triunghiul OBA este isoscel. Deci AB este secantă şi fie C al doilea punct al său de intersecţie cu $\mathcal{C}_1$. Atunci $AB \cap \text{Int}\, \mathcal{C}_1 = |AC|$. Deci $D \notin |AC|$ şi evident $D \notin |AB|$. Fie $m(\widehat{O_1AB}) = \alpha$, $m(\widehat{ABO_2}) = \beta$, $m(\widehat{BO_2O_1}) = \gamma$, $m(\widehat{O_2O_1A}) = \delta$. Cum $R_2 > R_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \| OO_2 \| > \| OO_1 \| \Rightarrow \delta > \gamma$. Cum $\alpha = \beta$ rezultă $\beta + \gamma < \alpha + \delta$ şi deoarece

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360$ înseamnă că $\beta + \gamma < 180$. Conform formei echivalente a axiomei paralelelor $\Rightarrow$ dreptelor O_1O_2 și AB se intersectează în semiplanul limitat de dreapta OO_2 care conține A. Rezultă pe dreapta O_1O_2 ordonarea $O_2 - O_1 - D$, iar pe dreapta AB ordonarea $B - A - C - D$. Avem $\widehat{ACO_1} \equiv \widehat{CAO_1} \equiv \widehat{OAB} \equiv \widehat{ABO}$ și deci $m(\widehat{O_2BA}) + m(\widehat{ACO_1}) = m(\widehat{O_2BA}) + m(\widehat{ABO}) = 180$, prin urmare $O_1C \parallel OO_2$. Avem deci $\frac{\|O_2D\|}{\|O_1D\|} = \frac{\|O_2B\|}{\|O_1C\|}$ sau $\frac{\|O_2D\| - \|O_1D\|}{\|O_1D\|} = \frac{\|O_2B\| - \|O_1C\|}{\|O_1C\|}$ adică $\frac{\|O_1O_2\|}{\|O_1D\|} = \frac{\|O_2B\| - \|O_1C\|}{\|O_1C\|}$ sau $\|O_1D\| = \frac{\|O_1O_2\| \|O_1C\|}{\|O_2B\| - \|O_1C\|}$. Dar lungimile segmentelor $|O_1O_2|$, $|O_1C|$, $|O_2B|$ sînt constante, prin urmare punctul D este fix pe O_1O_2.

200. Fie N, K, M mijloacele segmentelor $|AC|$, respectiv $|AB|$ și $|AD|$. Mediatoarele segmentelor $|AC|$, $|AB|$ și $|AD|$ determină triunghiul O_1O_2O. Avem $m(\widehat{OO_2O_1}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{OO_1O_2})$, fiind unghiuri cu laturile perpendiculare. Rezultă că triunghiul OO_2O_1 este isoscel deci $|OO_1| \equiv |OO_2|$. Mai avem $m(\hat{C}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{AOO_1})$ și $m(\widehat{ADC}) = 180 - m(\widehat{ADB}) = 180 - m(\widehat{AO_1K}) = m(\widehat{AO_1O})$. Rezultă că $\triangle AO_1O \sim \triangle ADC$ și deci $\frac{\|OO_1\|}{\|AO\|} = \frac{\|DC\|}{\|AC\|}$. Dar $\|AO\| = R$, $\frac{\|CD\|}{\|DB\|} = \frac{b}{c}$ de unde rezultă că $\|DC\| = \frac{ab}{b+c}$; prin urmare $\|OO_1\| = \|OO_2\| = \frac{aR}{b+c}$.

201. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater convex și $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ cercurile de diametre $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|$, $|A_3A_4|$ și $|A_1A_4|$ respectiv. Să notăm $\{P\} \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ și $\{Q\} \subset \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$ ($P \neq A_2$, $Q \neq A_4$). Presupunem că $P \in |A_1A_3|$ și arătăm că în acest caz avem și $Q \in |A_1A_3|$. Observăm că punctele A_1, P, Q sînt coliniare și de asemenea punctele A_1, Q, A_3 sînt coliniare, așa încît A_1, P, Q, A_3 sînt coliniare. Dacă $P = Q$ atunci avem $A_2A_4 \perp A_1A_3$, deci patrulaterul este ortodiagonal. Implicația „$\Leftarrow$" este imediată.

(Fl. Pârvănescu, G.M. 8/1980)

202. Vom trata cazul cînd $E \in |A_1B_1|$, $B_1 \in |ED|$ (celelalte cazuri de ordonare, tratîndu-se analog; există și cazuri mai simple cînd triunghiul este isoscel și deci $A_1 = E$ sau $B_1 = D$). Unghiurile $\widehat{AA_1O}$, $\widehat{AEO}$ și $\widehat{AFO}$ sînt drepte și deci sînt înscrise în cercul de diametru $|AO|$. Avem $m(\widehat{OA_1E}) = \frac{m(\hat{A})}{2} = \frac{m(\widehat{OE})}{2}$ și $m(\widehat{A_1OE}) = \frac{m(\hat{C}) - m(\hat{A})}{2}$. Prin urmare $m(\widehat{OEA_1}) = 180 - \frac{m(\hat{A})}{2} - \frac{m(\hat{C}) - m(\hat{A})}{2} = \frac{360 - m(\hat{A}) - m(\hat{C}) + m(\hat{A})}{2} = 180 - \frac{m(\hat{C})}{2}$. În patrulaterul $EODC$ două unghiuri opuse sînt drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Construind cercul circumscris patrulaterului $EODC$ avem $m(\widehat{OED}) = m(\widehat{OCD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BCA}) = \frac{m(\widehat{OD})}{2}$. Rezultă că $m(\widehat{OEA_1}) + m(\widehat{OED}) = 180$ deci punctele A_1, E, D sînt coliniare. Analog se arată că punctele E, B_1, D sînt coliniare. Dreptele acestea avînd două puncte comune coincid.

203. Construim bisectoarele interioare și exterioare. Tripletele de puncte I_b, C, I_a; I_b, A, I_c și I_c, B, I_a sînt coliniare. Avem $I_cC \perp I_aI_b$, $I_bB \perp I_aI_c$ și $I_aA \perp I_bI_c$ ceea ce înseamnă că I este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$. Cercurile circumscrise triunghiurilor II_aI_b, II_bI_c, II_cI_a sînt congruente.

204. Fie E', A' picioarele înălțimilor din E și A ale triunghiului EAD și H ortocentrul acestui triunghi. (Fig. III, 61). Puterea punctului H față de cercul de diametru $|EF|$ este $-\|HE\| \cdot \|HE'\|$, iar față de cercul de diametru $|AC|$ este $-\|HA\| \cdot \|HA'\|$. Dar $\|HE\| \cdot \|HE'\| = \|HA\| \cdot \|HA'\|$, adică H se află pe axa radicală a cercurilor de diametre $|EF|$ și $|AC|$. Asemănător se arată că ortocentrul X al triunghiului EBC se află pe axa radicală a cercurilor de diametre $|EF|$ și $|AC|$. Cum axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor, deducem că dreapta HX este perpendiculară pe dreapta determinată de mijloacele lui $|EF|$ și $|AC|$. Analog rezultă că HX este perpendiculară pe dreapta determinată de mijloacele lui $|EF|$ și $|BD|$. Rezultă că mijloacele segmentelor $|EF|$, $|AC|$, $|BD|$ sînt coliniare.

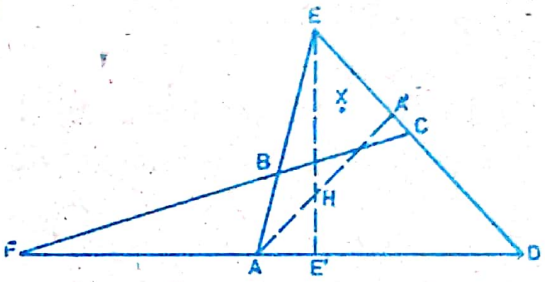


Fig. III. 61

206. Discutăm cazul triunghiului ascuțitunghic. În celelalte cazuri se procedează analog. Avem imediat $m(\hat{B}) = 60$. Mediatoarea lui $|AC|$ intersectează arcul mic $\widehat{AC}$ în M, deci $|BM$ este bisectoarea lui $\hat{B}$ și $I \in BM$. Notînd D mijlocul lui $|AC|$, din $\triangle ODA$ avem $2\|OD\| = \|OA\|$. Se știe că $\|OM\| = \|BH\|$ așa încît rezultă $|BH| \equiv |AO|$. Mai avem $OM \parallel BH$, iar O și H sînt separate de MB, deci $\widehat{OMB} \equiv \widehat{MBH}$. Triunghiul MBO este isoscel și astfel rezultă că $|BI$ este bisectoarea lui $\widehat{OBH}$. Deducem $\triangle OBI \equiv \triangle HBI$ și $|IO| \equiv |IH|$.

207. Deducem prin M dreapta $d \perp OA$ și fie $\{B\} = OA \cap d$. Patrulaterul $OKML$ este inscriptibil (în particular convex) așa încît diagonalele sale se intersectează într-un punct $\{C\} = |OM| \cap |KL|$. Patrulaterul $OKBM$ este inscriptibil, diagonalele sale se intersectează și atunci punctul B este în acel semiplan limitat de KM care nu conține cercul și $B \in |OA$. Rezultă imediat $\|OB\| \cdot \|OA\| = \|OM\| \cdot \|OC\|$ și din triunghiul dreptunghic OKM obținem $\|OM\| \|OC\| = r^2$. Deducem că $\|OB\|$ este constant și orice punct al locului aparține dreptei d unic determinată deoarece $B \in |OA$. Reciproc, fie M un punct oarecare pe d, dreapta d fiind perpendiculara pe OA în B, unde $B \in |OA$ iar $\|OB\|$ satisface relația $\|OB\| \cdot \|OA\| = r^2$. Ducem tangenta MK și $KC \perp OM$. Presupunem că KC intersectează OA în A'. În triunghiul OBM dreapta KC taie $|OM|$ și nu taie $|BM|$, deci taie $|OB|$, adică $A' \in |OB$. Repetînd prima parte a demonstrației rezultă $\|OB\| \cdot \|OA'\| = r^2$, de unde deducem $A = A'$.

Scanned with OKEN Scanner

208. Patrulaterul fiind inscriptibil este convex, deci diagonalele se intersectează și punctul de intersecție $E \in \text{Int } ABCD$. Dreapta FG trecînd prin punctul interior E va intersecta patrulaterul în 2 puncte K și L. În triunghiul ABC dreapta FG taie $|AC|$ și $|BC|$ (am presupus $K \in |BC|$), deci nu taie $|AB|$. Analog FG nu taie $|CD|$. Rezultă că FG taie $|AD|$, adică $L \in |AD|$. Deci K și L sînt pe laturi opuse ale patrulaterului. Avem $\triangle ADE \sim \triangle BEC$ și rezultă $\|AD\| \cdot \|CE\| = \|BC\| \cdot \|DE\|$ (1). Fie M și N picioarele perpendicularelor din O pe $|BC|$ și respectiv pe $|AD|$. Atunci $\|DN\| = \frac{\|AD\|}{2}$, $\|CM\| = \frac{\|BC\|}{2}$ și (1) devine $\frac{\|DN\|}{\|CM\|} = \frac{\|DE\|}{\|CE\|}$ (2). Avem $m(\widehat{NDE}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{MCE})$ și deci $\triangle NDE \sim \triangle MCE$ de unde rezultă că $\widehat{DNE} \equiv \widehat{CME}$ și $\widehat{DEN} \equiv \widehat{CEM}$. Prin urmare $\widehat{ANE} \equiv \widehat{BME}$ (3). Din ipoteză $|FE| \equiv |EG|$ și deci $OE \perp FG$. Cercul cu diametrul $|OL|$ trece prin E și N și deci $\widehat{LOE} = \widehat{ANE}$ (4) pentru că au măsura $\frac{m(\widehat{EL})}{2}$. Analog $\widehat{KOE} \equiv \widehat{BME}$ (5). Din relațiile (3), (4), (5) rezultă că $\widehat{LOE} \equiv \widehat{KOE}$ și deci $\triangle LOE \equiv \triangle KOE$. În particular avem $|EL| \equiv |EK|$ și cum $K \in |FE|$ și $L \in |EG|$ avem că $|FK| \equiv |LG|$.

209. Două cercuri sînt ortogonale dacă tangentele în oricare din punctele de intersecție sînt perpendiculare. Se observă că $AMSN$ este patrulater inscriptibil.

(Fl. Pîrvănescu, GM. 2/1978)

210. Fie K și O centrele cercurilor circumscris și înscris triunghiului ABC și D mijlocul arcului $\widehat{AC}$, inclus în Int $\widehat{ABC}$. Punctele O, D sînt separate de AC deci $|AC \subset \text{Int } \widehat{OAD}$. Avem atunci $m(\widehat{OAD}) = m(\widehat{OAC}) + m(\widehat{CAD}) = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B})}{2} = m(\widehat{AOD})$ de unde rezultă că $|OD| \equiv |AD|$. De asemenea pentru o coardă oarecare MN în cercul circumscris, ce trece prin O, avem $\|OM\| \cdot \|ON\| = \|BO\| \cdot \|OD\|$. Dacă $OE \perp AB$ și $|FD|$ este diametru în cercul circumscris, atunci $\triangle BOE \sim \triangle FDA$ de unde rezultă $\frac{\|BO\|}{\|OE\|} = \frac{\|FD\|}{\|AD\|}$ sau ținînd seama că $\|AD\| = \|OD\|$ avem $\|BO\| \cdot \|OD\| = \|OE\| \cdot \|FD\|$ deci $\|MO\| \cdot \|ON\| = \|OE\| \cdot \|FD\|$. Particularizînd coarda MN la cazul cînd trece prin K vom avea $O \in |MK|$, $K \in |ON|$ deci $\|MO\| = R - l$, $\|ON\| = R + l$, $\|OE\| = r$, $\|FD\| = 2R$ și obținem relația cerută.

211. Sînt posibile două cazuri. 1). Triunghiul ABC este obtuzunghic. Fie $\hat{C}$ unghiul obtuz. În acest caz $R_1 = \frac{\|AB\|}{2} < R_0$. Construim cele trei discuri cu centrele în A, B și C de rază R_1. Aceste discuri acoperă interiorul triunghiului ABC. Fie $\{D\} = \mathcal{C}(A, R_1) \cap [AB]$. Avem că $D \in \text{Int } \mathcal{C}(C, R_1)$. La fel, dacă $\{D_1\} = \mathcal{C}(B, R_1) \cap [AB]$, atunci $D_1 \in \text{Int } \mathcal{C}(C, R_1)$ (punctele D

Scanned with OKEN Scanner

și D_1 coincid). Rezultă că există un număr $R < R_1$ astfel încît discurile $\overline{\mathcal{C}(A, R)}$, $\overline{\mathcal{C}(B, R)}$ și $\overline{\mathcal{C}(C, R)}$ să acopere interiorul triunghiului ABC, adică $[AB] \cup [BC] \cup [AC] \cup \text{Int } ABC \subset \overline{\mathcal{C}(A, R)} \cup \overline{\mathcal{C}(B, R)} \cup \overline{\mathcal{C}(C, R)}$. Rezultă că $R_{\min} < R_1$. 2). Triunghiul ABC nu este obtuzunghic. În acest caz $R_0 = R_1$ și demonstrăm că $R_0 = R_{\min}$. Este clar că discurile de rază R_0 avînd centrele în vîrfurile triunghiului, îl acoperă. De aceea $R_0 \geqslant R_{\min}$. Dar discurile de rază $R < R_0$ avînd centrele în vîrfurile triunghiului nu acoperă centrul O al cercului circumscris triunghiului. Deoarece în acest caz $O \in [AB] \cup [BC] \cup [AC]$ sau $O \in \text{Int } ABC$ rezultă că $R_0 = R_{\min}$.

212. Fie A, B, C, D, E, F (Fig. III, 62) cele șase puncte astfel încît tripletele $\{A, B, C\}$, $\{A, D, E\}$, $\{C, F, D\}$, $\{B, F, E\}$ sînt situate fiecare pe cîte o dreaptă iar B se află între A și C, D se află între A și E. Aplicînd de două ori teorema transversalei, există $\{F\} = |CD| \cap |BE|$. Figura astfel formată se numește patrulater complet. Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ cercurile circumscrise triunghiurilor ABE, BCF, ACD și DEF respectiv. Cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ se intersectează în două puncte separate de dreapta CF deoarece punctul $F \in \mathcal{C}_2$ este punct interior coardei $[BE]$ a cercului $\mathcal{C}_1$. Fie $\{B, M\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. M este situat de aceeași parte a dreptei AB, ca și punctele D, E și F. Avem $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AEB}$, $\widehat{BMC} \equiv \widehat{BFC}$ și deci $\text{m}(\widehat{AMC}) = \text{m}(\widehat{AMB}) + \text{m}(\widehat{BMC}) = \text{m}(\widehat{AEB}) + \text{m}(\widehat{BFC}) = \text{m}(\widehat{AEB}) + \text{m}(\widehat{DFE}) = \text{m}(\widehat{ADC})$. Relația $\widehat{AMC} \equiv \widehat{ADC}$ și faptul că punctele D și M sînt situate de aceeași parte a dreptei AC implică $M \in \mathcal{C}_3$. Rezultă că $M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$. Analog, se arată că există un punct $N \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_4$. Rezultă că $\{M, N\} \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Nici unul dintre punctele M și N nu coincide cu punctul A, deoarece A este exterior coardei $[BC]$ a cercului $\mathcal{C}_2$ și exterior coardei $[DE]$ a cercului $\mathcal{C}_4$ și deci nu se află nici pe cercul $\mathcal{C}_2$, nici pe cercul $\mathcal{C}_4$. Rezultă că punctele M și N coincid, ceeace înseamnă că cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ au un punct comun.

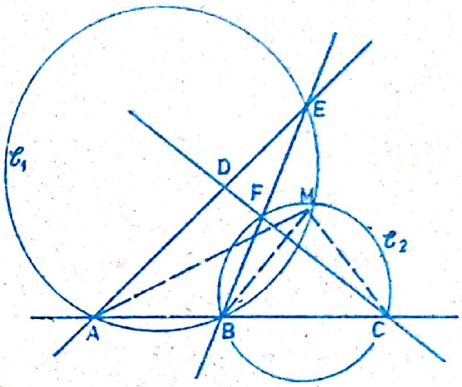


Fig. III, 62

214. Fie $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ bisectoarele triunghiului ABC și I centrul cercului înscris în triunghi. Aplicînd teorema lui *Menelaus* în triunghiul $AA'B$, obținem $\frac{\|AI\|}{\|IA'\|} \cdot \frac{\|CA'\|}{\|BC\|} \cdot \frac{\|BC'\|}{\|C'A\|} = 1$, de unde $\frac{\|AI\|}{\|IA'\|} = \frac{\|BC\|}{\|CA'\|} \frac{\|C'A\|}{\|BC'\|} = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b+c}{a}$. Cu teorema lui *Stewart* obținem pe rînd:

$\|MI\|^2 \cdot \|AA'\| + \|AI\| \cdot \|IA'\| \cdot \|AA'\| = \|MA\|^2 \cdot \|IA'\| + \|MA\|^2 \cdot \|IA\|$,

$\|MA'\|^2 \cdot \|BC\| + \|BA'\| \cdot \|A'C\| \cdot \|BC\| = \|MB\|^2 \cdot \|A'C\| + \|MC\|^2 \cdot \|A'B\|$

sau $\|MI\|^2 \cdot \|AA'\| + \|AI\| \cdot \|IA'\| \cdot \|AA'\| = \|MA\|^2 \frac{a}{a+b+c} \cdot \|AA'\| +$

$+ \|MA'\|^2 \cdot \|AA'\| \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$.

$$\|MA'\|^2 a + a \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \|MB\|^2 \frac{b}{b+c} a + \|MC\|^2 \frac{c}{b+c} a,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\frac{a\|MA\|^2+b\|MB\|^2+c\|MC\|^2}{a+b+c}=\|MI\|^2+\|AI\|\cdot\|IA'\|+$$

$$+\frac{a^2bc}{(b+c)(a+b+c)}.$$

Rezultă că $\Sigma a\cdot\|MA\|^2$ este minimă cînd $\|MI\|=0$, deci cînd M coincide cu I. În acest caz prin calcul direct se obține: $a\|IA\|^2+b\|IB\|^2+c\|IC\|^2=abc$. Aplicînd inegalitatea lui *Cauchy-Buniakowski*

$$(a\|MA\|^2+b\|MB\|^2+c\|MC\|^2)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)\cdot$$

$$\cdot(\|MA\|^4+\|MB\|^4+\|MC\|^4),\text{ de unde}$$

$$\Sigma\|MA\|^4\geqslant\frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2},$$

egalitatea avînd loc numai cînd triunghiul este echilateral.

(I. Tomescu, G.M. 6/1972)

215. $O_1B_1\parallel O_2A_2$ deoarece punctele O_1 și O_2, A_2 și B_1 sînt simetrice în raport cu M. Prin translație A_1 trece în A_2, O_1 trece în O_2, deci $A_1O_1\parallel A_2O_2$. Rezultă că $A_1O_1\parallel O_1B_1$ și deci punctele A_1, O_1, B_1 sînt coliniare, ceeace înseamnă că $|A_1B_1|$ este diametru.

Observație. Compunerea translației cu simetria centrală de mai sus este simetria centrală care transformă cercul $\mathcal{C}(O_1, r)$ în el însuși.

216. Fie $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, $\mathcal{C}(O_3, r_3)$ cele trei cercuri, M punctul lor comun, iar A, B, C punctele în care se mai intersectează cercurile $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ și $\mathcal{C}(O_3, r_3)$, $\mathcal{C}(O_3, r_3)$ și $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ respectiv. Considerăm simetriile axiale $\mathcal{S}_{AM}$, $\mathcal{S}_{BM}$, $\mathcal{S}_{CM}$. Compunerea lor este simetria axială $\mathcal{S}_{O_2M}$. Dacă P este punctul diametral opus punctului M pe cercul $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ atunci $\mathcal{S}_{AM}(P)=Q$, $\mathcal{S}_{BM}(Q)=R$, $\mathcal{S}_{CM}(R)=P$ astfel încît $|AP|\equiv|AQ|$, $|BQ|\equiv|BR|$, $|CR|\equiv|CP|$. Rezultă că $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ sînt linii mijlocii în triunghiul PQR și deci cercul circumscris triunghiului ABC are aceeași rază ca și cercurile circumscrise triunghiului QAB, RBC, PCA.

(Problema „piesei de cinci lei" a lui **G. Țițeica**)

217. Translatăm laturile neparalele ale trapezului astfel încît imaginile lor să treacă prin mijlocul bazei mici a trapezului și considerăm triunghiul în care segmentul ce unește mijloacele bazelor este simultan bisectoare și mediană.

218. Presupunem problema rezolvată și considerăm o translație $\mathcal{T}$ de vector $\overrightarrow{AC}$. Fie $B'=\mathcal{T}(B)$ și $D'=\mathcal{T}(D)$. Evident că $\mathcal{T}(A)=C$. Dacă M este mijlocul lui $|AB|$ și N mijlocul lui $|CD|$ rezultă ușor că avem $\|BD'\|=2\|MN\|$. Deoarece mai avem $\|CD'\|=\|AD\|$ rezultă că laturile triunghiului BCD' sînt cunoscute, deci BCD' se poate construi. Problema se reduce la construcția paralelogramului $BDD'B'$ știind că D și B sînt pe două cercuri cu centrul în C și de raze date.

220. Fie $|AB|$ diametru în $\mathcal{C}(I, r)$ și $|A'B'|$ diametru în $\mathcal{C}'(I', r')$. Să notăm $AA'\cap BB'=\{O_1\}$ și $AB'\cap A'B=\{O_2\}$. Presupunînd $r>r'$ rezultă că I și I' se găsesc pe mediana triunghiului ABO_1. Punctul O_2 este intersecția

Scanned with OKEN Scanner

diagonalelor trapezului $ABB'A'$ și deci este coliniar cu mijloacele laturilor paralele. Prima omotetie are centrul în O_1 și raportul $r' : r$, iar a doua are centrul în O_2 și raportul $-(r' : r)$.

221. Dacă punctele C, D și E sînt coliniare, atunci dreptele MN, MP sînt omotetice cu dreptele CD, CE respectiv prin omotetia cu centrul în mijlocul segmentului $|AB|$ și avînd raportul $\frac{1}{3}$.

222. $ABCD$ fiind trapez, avem: $\frac{\| OB \|}{\| OA \|} = \frac{\| OD \|}{\| OC \|} = k$. Notăm cu F compunerea simetriei în raport cu bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și omotetiei de centru O și raport k. Avem $F(A) = B$, $F(C') = D$, $F(A') = B'$ și deci $F(\triangle ACA') = \triangle BDB'$ de unde rezultă că $\widehat{ACA'} \equiv \widehat{BDB'}$.

223. Omotetia de centru G și raport $-1/2$ transformă triunghiul ABC în triunghiul $A'B'C'$. Printr-o omotetie bisectoarea unui unghi se transformă în bisectoarea unghiului transformat.

224. Să notăm cu F_i' omotetia de centru O_i și raport $k_i' = 1/k_i$. Atunci avem $F_2' \circ F_1(d) = d$ și deci dreapta d trece prin centrul omotetiei $F_2' \circ F_1'$ pe care îl notăm cu A. Dreapta d trece și prin centrul B al omotetiei compuse $F_3' \circ F_1'$, deci este determinată de punctele A și B. Dacă ambele transformări $F_2' \circ F_1'$ și $F_3' \circ F_1'$ sînt translații avem o infinitate de soluții.

227. Se consideră o inversiune F de centru A și putere k. Fie $B' = F(B)$, $C' = F(C)$ și $D' = F(D)$. Dacă se ține seama de proprietatea 3) din problema **225** în inegalitatea $\| B'C' \| + \| C'D' \| \geqslant \| B'D' \|$, rezultă inegalitatea cerută. Avem egalitate dacă și numai dacă patrulaterul este inscriptibil.

228. 1) Se consideră inversiunea F de centru B și putere $4r^2$. Imaginea lui $\mathcal{C}(O, r)$ prin F este tangenta în A la cercul dat și invers. Dreapta $P'Q'$ se transformă în cercul $\mathcal{C}'$ circumscris triunghiului BPQ. Fie M al doilea punct de intersecție al dreptei AB cu cercul $\mathcal{C}'$. Rezultă imediat $2r \| AM \| = \| AP \| \cdot \| AQ \| = \text{const.}$, deci M este un punct fix pe AB. Dreapta $P'Q'$ va trece prin punctul fix M', inversul lui M prin inversiunea F. 2) Fie M și N intersecțiile dreptelor PP'', respectiv QQ'' cu tangenta în B la cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Se deduce ușor $\| BR \| = 2r^2 : \| AP \|$ și $\| BS \| = 2r^2 : \| AQ \|$ de unde rezultă că produsul $\| BR \| \cdot \| BS \|$ este constant. Mai departe se procedează ca la punctul 1).

229. Fie M punctul de tangență al celor două cercuri și A_1 respectiv A_2 punctele de tangență ale lui d cu $\mathcal{C}_1$ respectiv $\mathcal{C}_2$. Se face o inversiune de centru A_1 și putere $k = \| A_1A_2 \|^2$. Atunci $\mathcal{C}_2$ se transformă în el însuși iar $\mathcal{C}_1$ într-o dreaptă d' paralelă cu d și tangentă la $\mathcal{C}_2$. Problema se reduce astfel la construirea unui cerc tangent cercului $\mathcal{C}_2$ și tangent dreptelor paralele d și d'. Avem două soluții.

230. 1) Se consideră o inversiune cu centrul în A care să invarieze cercul $\mathcal{C}(O, r)$, deci va avea puterea egală cu puterea punctului A față de acest cerc. Cercul căutat se transformă într-o dreaptă care trece prin transformatul punctului B și este perpendiculară pe OA. 2) Se procedează ca la punctul precedent. Cercul căutat se transformă în dreapta care trece prin O și transformatul lui B.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

1. Fie $M(c, y)$. Notăm cu N mijlocul lui AM, P simetricul lui A față de M și Q simetricul lui M față de A; $N = N\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+y}{2}\right)$, deci locul geometric al lui N este dreapta $x = \frac{a+c}{2}$; locul geometric al lui P este dreapta $x = 2c - a$ iar locul geometric al lui Q este dreapta $x = 2a - c$.

2. 1) $M_2(a, -b)$, $M_3(-a, b)$, $M_4(-a, -b)$;

2) dreptunghi; 3) $a = b$.

3. Punctul de abscisă 6.

4. 1) 60°; 135°; 2) 75°.

5. $A(3, 2)$, $B(-3, -4)$, $C-1, 6)$.

6. 3 soluții: $C(2, 4)$ sau $C(2, -2)$ sau $C(-2, 2)$.

7. Fie paralelogramul $ABCD$ de vîrfuri $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ și $D(d_1, d_2)$. Scriind că mijlocul segmentului $|AC|$ coincide cu mijlocul segmentului $|BD|$ găsim $d_1 = a_1 + c_1 - b_1$, $d_2 = a_2 + c_2 - b_2$.

8. 1) Dăm lui m două valori distincte arbitrare. Obținem două drepte din mulțimea D, determinăm punctul lor comun de intersecție și demonstrăm că acest punct aparține oricărei drepte din mulțimea D.

Altă metodă: ecuația $x + my + m - 3 = 0$ se mai scrie $x - 3 + m(y - 1) = 0$. Se observă că punctul de coordonate 3 și -1 verifică ecuația pentru orice m real.

2) $x + 3y = 0$;

3) $x + y - 2 = 0$;

4) $x - y - 4 = 0$;

5) $x = 3$;

6) Nu. O astfel de dreaptă ar trebui să aibă coeficientul unghiular egal cu 0. Dar, pentru $m \neq 0$ coeficientul unghiular este $-\frac{1}{m} \neq 0$, iar pentru $m = 0$ se obține dreapta paralelă cu Ox.

9. 1) 7; 2) 27.

10. 1) Notînd cu R_1 și R_2 razele celor două cercuri găsim $R_1 = R_2 = 5$, $d(A, D) = 15 > R_1 + R_2$ deci cercurile sînt exterioare (fig. IV, 1).

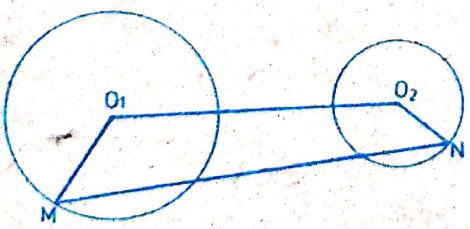


Fig. IV. 1

2) Intersecțiile cu Ox: $F(6, 0)$ și $G(-4, 0)$.
Intersecțiile cu Oy: $L(0, 2\sqrt{6})$, $M(0, -2\sqrt{6})$.

3) Arătăm mai întîi că pentru orice două cercuri exterioare de centre O_1 și O_2 și de raze R_1 și R_2, dacă M și N aparțin fiecare cîte unui cerc atunci:

$$d(O_1, O_2) - R_1 - R_2 \leqslant d(M, N) \leqslant d(O_1, O_2) + R_1 + R_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, folosind proprietățile distanței avem:

$$d(M, N) \leqslant d(M, O_1) + d(O_1, O_2) + d(O_2, N)$$

și

$$d(O_1, O_2) \leqslant d(O_1, M) + d(N, O_2).$$

Găsim

$$\min d(M, N) = 5 \quad \text{și} \quad \max d(M, N) = 25.$$

11. 2) $x^2 + y^2 = 20$.

12. Fie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ și $D(d_1, d_2)$. Se arată că segmentele $|MP|$, $|NQ|$, $|ST|$ au același mijloc de coordonate $x = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}$ și $y = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}$.

13. Demonstrăm că $\frac{\|OA\|}{\|OA'\|} = \frac{1}{3}$ iar $A \in |OA'|$. Pentru a obține $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ este suficient să luăm punctul B' astfel încît $B \in |OB'|$ și $\frac{\|OB\|}{\|OB'\|} = \frac{1}{3}$. Găsim $B'(3, 9)$. Soluția nu este unică. O altă soluție se obține luînd B și B' de o parte și de alta a dreptei AO.

14. $m = -1$.

15. Presupunem că cele trei vîrfuri A, B, C au coordonatele întregi. Fie $|AE$ o semidreaptă paralelă cu axa Ox. Presupunînd că $B \in \operatorname{Int} \widehat{CAE}$ avem $\operatorname{tg} \widehat{CAB} = \operatorname{tg}(\widehat{CAE} - \widehat{BAE}) = \frac{\operatorname{tg}(\widehat{CAE}) - \operatorname{tg}(\widehat{BAE})}{1 + \operatorname{tg} \widehat{CAE} \operatorname{tg} \widehat{BAE}}$. Dar $\operatorname{tg} \widehat{CAE} \in \mathbf{Q}$ și $\operatorname{tg} \widehat{BAE} \in \mathbf{Q}$ de unde ar rezulta $\operatorname{tg} \widehat{CAB} \in \mathbf{Q}$ ceea ce este absurd căci $m(\widehat{CAB}) = 60$ deci $\operatorname{tg} \widehat{CAB} = \sqrt{3}$. Se analizează analog cazul cînd $B \notin \operatorname{Int} \widehat{CAE}$.

16. 1) Fie d o dreaptă care conține punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$; în raport cu un sistem de coordonate pe d punctele menționate au respectiv abscisele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Din ipoteză rezultă

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \ldots = |x_{n-1} - x_n| = |x_n - x_1|$$

și notînd $x_i - x_{i+1} = y_i (i = 1, 2, \ldots, n$, cu convenția $x_{n+1} = x_1)$ rezultă $|y_1| = |y_2| = \ldots = |y_n|$ și $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$. Din egalitatea modulelor rezultă că dacă unul din numerele y_i ar fi nenul atunci toate ar fi nenule. Suma fiind zero, rezultă în mod necesar că numărul indicilor i pentru care $y_i > 0$ este egal cu numărul indicilor i pentru care $y_i < 0$, deci n este par, contrar ipotezei. Deci $y_i = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ și punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coincid.

2) Nu. Contrexemplu: $A_1(1, 0)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(1, 0)$, $A_4(0, 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

FUNCȚII TRIGONOMETRICE

1. 1) +; 2) +; 3) —; 4) +; 5) +; 6) Stabilim cadranul în care se află punctul $F(49)$ (F fiind funcția de acoperire universală):

$$\frac{49}{\frac{\pi}{2}} = \frac{98}{\pi} \in \left(\frac{98}{3{,}15}, \frac{98}{3{,}14}\right).$$

$$31{,}1\ldots < \frac{98}{\pi} < 31{,}2\ldots$$

Rezultă $\left[\frac{49}{\frac{\pi}{2}}\right] = \left[\frac{98}{\pi}\right] = 31$, deci $49 = 31 \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ cu $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Așadar $F(49)$ se află în cadranul IV, deci $\cos 49 > 0$.

7) —; 8) +; 9) —.

2. 1) —1; 2) 0; 3) $28 \cdot \frac{\pi}{2} < 45 < 29 \cdot \frac{\pi}{2}$, deci $F(45)$ este în primul cadran, $0 < \sin 45 < 1$, $[\sin 45] = 0$; 4) —1; 5) —1.

3. 1) minus; 2) plus; 3) plus; 4) plus.

5. $\sqrt{3}$.

6. $\frac{73}{231}$.

7. $-\frac{33}{65}$ sau $\frac{63}{65}$.

8. $\frac{\sqrt{7}+1}{4}$.

9. Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ are perioada principală 2π și este impară. Funcția g are domeniul maxim de definiție $\mathbf{R}$, are perioada principală $\frac{\pi}{3}$ și este pară. Funcția h are domeniul maxim de definiție $\mathbf{R}$, are perioada principală 2π și nu este nici pară nici impară.

10. Se remarcă faptul că $f_5(x) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

11. 4) $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2k\pi\right]$.

12. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$; $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$; perioada principală este π.

Scanned with OKEN Scanner

13. 2) Nu! Un contraexemplu ni-l oferă funcțiile $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$. Funcțiile f și g au perioada principală 2π în vreme ce produsul lor are perioada principală π.

14. 2) $\frac{2\pi}{3}$.

15. Notînd $\operatorname{tg} \alpha = x$ avem $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. Sistemul de inecuații nu are soluție.

16. Se ține seama că în condițiile date avem:

$$0 < \sin \alpha < 1, \quad 0 < \cos \alpha < 1, \quad 0 < \sin 2\alpha \leqslant 1.$$

17. 1.

18. Se elimină numitorii ținînd seama că $\sin x - 2 < 0$ și $3 - \sin x > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

19. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$; $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f_4 : \mathbf{R} \setminus \{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$.

21. 1) Se dau lui x valori convenabil alese pentru a obține două relații între a și b (de exemplu $x = 0$ și $x = \pi$).

23. Nu. Vezi cazul cînd $x = 0$ și $y = \pi$.

24. Pentru $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$ deci $x \cos y = y \cos x$ dacă și numai dacă $\frac{x}{\cos x} = \frac{y}{\cos y}$ dacă și numai dacă $f(x) = f(y)$, unde am notat cu f funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.

Funcția f fiind strict crescătoare este injectivă, deci $f(x) = f(y)$ dacă și numai dacă $x = y$. Analog se arată că $x \operatorname{ctg} x = y \operatorname{ctg} y$ dacă și numai dacă $x = y$.

27. Pentru $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$ inegalitatea este evidentă deoarece $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$. Pentru cazul $0 < x < \frac{\pi}{2}$ considerăm pe cercul trigonometric punctul M astfel că măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOM}$ este x. Exprimînd faptul că aria triunghiului AOM este mai mică decît aria sectorului circular AOM găsim:

$$\sin x < x. \text{ (fig. V, 1)}$$

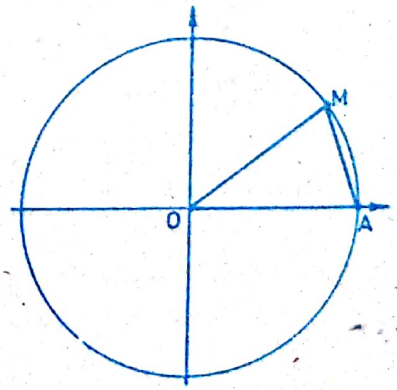


Fig. V, 1

Pentru $x = 0$ avem $\sin x = x$ iar dacă $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ notăm $x = -y$ și rezultă conform celor deja demonstrate $\sin y < y$, adică $|\sin x| < |x|$.

Scanned with OKEN Scanner

28. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = f(y)$. Atunci $x - y = \cos y - \cos x$ implică $\frac{x-y}{2} = \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$. Presupunînd $x \neq y$ ar rezulta

$$\left|\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\right| \cdot \left|\sin\frac{x+y}{2}\right| = 1,$$

ceea ce este imposibil căci

$$\left|\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\right| < 1 \text{ iar } \left|\sin\frac{x+y}{2}\right| \leqslant 1.$$

29. f este strict crescătoare.

30. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fie M punctul de pe cercul trigonometric pentru care $\mu(\widehat{AOM}) = x$ (fig. V, 2). Tangenta în A la cerc taie dreapta OM în T. Scriem că aria sectorului circular AOM este mai mică decît aria triunghiului AOT și obținem:

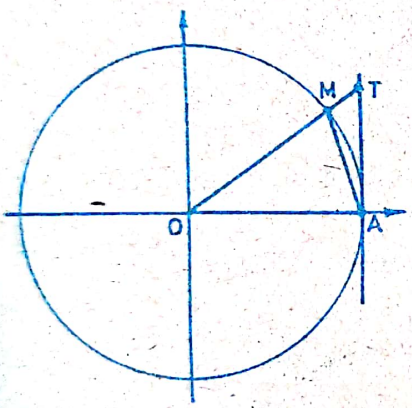


Fig. V, 2

$$x < \operatorname{tg} x.$$

Pentru $x = 0$ obținem egalitate iar pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ notăm $x = -y$;

atunci $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și deci $y < \operatorname{tg} y$, adică

$$|x| < |\operatorname{tg} x|.$$

31. Avem $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ deci $\beta - \alpha < \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$, de unde rezultă concluzia.

32. $\sin^m x + \cos^n x \leqslant |\sin^m x + \cos^n x| \leqslant |\sin^m x| + |\cos^n x| \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

34. Din relația $0 \leqslant \cos x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$ rezultă $\sin x \cos x \leqslant \cos x$. Folosind monotonia funcției cos și faptul că $x \geqslant \sin x$ obținem $\cos x \leqslant \cos(\sin x)$. Prin urmare $\sin(\cos x) \leqslant \cos(\sin x)$. Pentru a avea loc egalitate trebuie să avem simultan $\cos x = 0$ și $\sin x = x$, ceea ce este imposibil.

35. Din relația $\operatorname{tg}\alpha_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha_i \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n (i = 1, 2, \ldots, n)$ deducem $\operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_i \leqslant \sin\alpha_i \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_i$ de unde

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i} \leqslant \operatorname{tg}\alpha_n.$$

36. 2) π este perioadă a funcției f deoarece $f(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = f(x)$. Arătăm că π este chiar perioada principală. Într-adevăr, dacă T este o perioadă oarecare, avem $|\sin(x+T)| = |\sin x|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și dînd lui x valoarea 0 rezultă $\sin T = 0$, deci $t = k\pi$ pentru un anume $k \in \mathbf{Z}$. Valoarea minimă strict pozitivă pe care o poate lua T este π (cînd $k = 1$).

4) Nu.

37. Funcțiile admit perioada 2π. Pe intervalul $[0, 2\pi]$ explicităm funcțiile. De exemplu:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 1 \text{ pentru } x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \text{ pentru } x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \\ -1 \text{ pentru } x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

38. 1) Domeniul maxim de definiție este $\mathbf{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ și avem $f(x) = \dfrac{4\sin x \cos x}{|\sin x \cos x|}$ deci mulțimea valorilor funcției este $\{-4, 4\}$.

3) $f(x) = -4$ dacă și numai dacă $\sin x \cos x < 0$, deci dacă și numai dacă $\sin 2x < 0$. Prin urmare:

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right).$$

39. 1) Presupunînd că f ar avea perioada $T (T > 0)$ ar rezulta că $(x+T)\sin(x+T) = x\sin x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ rezultă $T\sin T = 0$ deci $T = k\pi$ cu $k \in \mathbf{N}^*$. Deci $(x + k\pi)\sin(x + k\pi) = x\sin x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\pm\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{2}$ de unde $k = 1$ deci

$$(x+\pi)\sin(x+\pi) = x\sin x, \; x \in \mathbf{R},$$

contradicție.

41. 1) Dacă $\alpha \in \mathbf{Q}$, $\alpha = \dfrac{m}{n}$ cu $m, n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$. Pentru $T = 2n\pi$ avem $f(x) = f(x+T)$, deci T este perioadă. Reciproc, să presupunem că f este periodică și T este o perioadă deci $\sin x + \cos \alpha x = \sin(x+T) + \cos\alpha(x+T)$, $x \in \mathbf{R}$. Dînd lui x valoarea 0 avem $\sin T + \cos\alpha T = 1$ iar pentru $x = -T$ obținem $-\sin T + \cos\alpha T = 1$. Rezultă $\sin T = 0$ și $\cos\alpha T = 1$ deci $T = k\pi$, $\alpha T = k'\pi$ cu $k, k' \in \mathbf{Z}$ și de aici $\alpha = \dfrac{k'}{k} \in \mathbf{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Notăm cu T o perioadă arbitrară a funcției. Procedînd ca la punctul 1) obținem $T = k\pi$ și $\frac{3}{5}T = k'\pi$ (cu $k, k' \in \mathbf{Z}$ convenabil aleși), deci $\frac{k'}{k} = \frac{3}{5}$. Dacă dorim ca T să fie perioadă principală, alegem k și k' minimali, deci $k = 5$, $k' = 3$ și rezultă $T = 5\pi$. Dar 5π nu este perioadă (condițiile $T = k\pi$ și $\frac{3}{5}T = k'\pi$ sînt necesare dar nu și suficiente pentru ca T să fie o perioadă). Pentru $k' = 6$ și $k = 10$ obținem $T = 10\pi$ și este adevărat că $f(x) = f(x + 10\pi)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deci 10π este perioada principală.

42. În formula $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ dînd lui α valoarea $40°$ obținem $\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sin 40° - 4\sin^3 40°$.

43. Ținem seama că $\sin 150° = 3\sin 50° - 4\sin^3 50°$. Deci $\sin 50°$ este soluție a ecuației:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

44. Produsul sinusurilor poate fi 1 numai dacă $|\sin a| = |\sin 2a| = \ldots = |\sin na| = 1$. Cum $n \geqslant 2$, ar rezulta $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$ și $2a = \frac{\pi}{2} + k'\pi$ cu $k, k' \in \mathbf{Z}$, ceea ce implică $\pi + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + k'\pi$ adică $2k + 1 = k' + \frac{1}{2}$, ceea ce nu este posibil.

45. Inegalitatea poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin 2x} > 4$$

și pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem: $\frac{1}{\sin x} > 1$, $\frac{1}{\cos x} > 1$, $\frac{2}{\sin 2x} > 2$.

48. $\sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x \geqslant 2\sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x = \frac{8}{\sin^2 2x} \geqslant 8$.

49. Din relația $2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10} - 3\cos\frac{\pi}{10}$ obținem $4\sin^2\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0$ de unde rezultă:

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{10} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

51. Dacă $\sin 1°$ ar fi raţional ar rezulta $\cos 2°$ raţional, de aici $\cos 6°$ raţional, ceea ce ar implica $\cos 18°$ raţional, contradicţie. Analog se arată că şi $\cos 1°$ este iraţional.

52. 1) Notînd $S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$, calculăm mai întîi $S \sin\frac{\pi}{7}$.

2) Se aplică acelaşi procedeu.

53. $S_1 = 4$, $S_2 = 3$.

54. Din inegalitatea $-\frac{\pi}{3} < -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 < \frac{\pi}{3}$, folosind faptul că funcţia sin este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ deducem $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \sin(\sin x) < \sin\frac{\pi}{3}$.

55. $f(x) = 15 + \sin^2 x \cdot (1 + \cos^2 x) \geqslant 15$, cu egalitate pentru $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$f(x) = 16 - \cos^4 x \leqslant 16$, cu egalitate pentru $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

56. 1) Aplicînd inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 x}}{2} \geqslant \sqrt[4]{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} \geqslant \sqrt[4]{2}$$

şi nu există valori ale lui x pentru care să aibă loc egalitatea.

2) $$\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt[4]{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)}} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Egalitatea are loc pentru $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

57. Se aplică inegalitatea mediilor. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \ldots = \operatorname{tg}\alpha_n$ adică pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

58. 1) $A = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $B = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $C = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

3) Presupunînd $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \leqslant -2$ şi ţinînd seama că funcţia cos are valori de modul mai mic sau egal cu 1 ar rezulta $\cos x < 0$, $\cos 2x < 0$, $\cos 3x < 0$, ceea ce contrazice faptul că $A \cap B \cap C = \emptyset$.

5) Notăm $\alpha = \frac{x}{2}$ şi utilizăm 3).

60. 6) $|\sin(x \pm y)| = |\sin x \cos y \pm \cos x \sin y| \leqslant |\sin x| \cdot |\cos y| + |\cos x| \cdot |\sin y| \leqslant |\sin x| + |\sin y|$.

61. Se aplică metoda inducţiei matematice. Se folosesc proprietăţile modulului şi se ţine seama de faptul că $|\cos x| \leqslant 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

62. 1) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

2) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha < 1$ implică $\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) < 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$, de unde rezultă $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$, deci $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Inegalitatea $\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta) < 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ este echivalentă cu $\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}(\beta + \beta) < 1$ de unde $\alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ pe baza punctului 1).

63. 1) Dacă $a = b = 0$, $f(x) = 0$ deci $\max\limits_{x\in R} f(x) = \min\limits_{x\in R} f(x) = 0$. Dacă a și b nu sînt amîndouă nule $a^2 + b^2 \neq 0$ și atunci

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

unde am notat cu α un număr real cu proprietatea

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ și } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Rezultă $|f(x)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ și deci $\max\limits_{x\in R} f(x) = \sqrt{a^2+b^2}$ și $\min\limits_{x\in R} f(x) = -\sqrt{a^2+b^2}$.

O altă soluție se poate da utilizînd inegalitatea *Cauchy-Buniakovski:*

$$(a\sin x + b\cos x)^2 \leqslant (a^2+b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

de unde $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

2) Se exprimă $g(x)$ în funcție de $\sin 2x$ și $\cos 2x$ și se ține seama de rezultatul de la punctul 1);

$$\max g(x) = \frac{a + c + \sqrt{b^2 + (c-a)^2}}{2},$$

$$\min g(x) = \frac{a + c - \sqrt{b^2 + (c-a)^2}}{2}.$$

64. Avem $(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) = \sin^2 x + ab\cos^2 x + (a+b)\sin x\cos x = \frac{1+ab}{2} + \frac{ab-1}{2}\cos 2x + \frac{a+b}{2}\sin 2x \leqslant \frac{1+ab}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \leqslant 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

65. Pentru $x \in \left(0, \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $\operatorname{tg} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) > \operatorname{tg} x > x$, adică $\frac{x}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)} < 1$. Avem $0 < \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, deci $\sin x > 0$, $\sin(\sin x) < \sin x < x$ adică $\frac{\sin(\sin x)}{x} < 1$.

(I.V. Maftei, G.M. 4/1982)

Scanned with OKEN Scanner

66. Presupunem că a și b nu sînt amîndouă nule, deci $a^2 + b^2 \neq 0$. Atunci $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ unde $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. În condițiile problemei, rezultă $\sin(x_1 + \varphi) = \sin(x_2 + \varphi) = 0$, de unde $x_1 + \varphi = k\pi$ și $x_2 + \varphi = k'\pi$ cu $k, k' \in \mathbf{Z}$, deci $x_1 - x_2 = (k - k')\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$, contradicție.

67. $f(x) = (a_1 \cos b_1 + \ldots + a_n \cos b_n) \cos x - (a_1 \sin b_1 + \ldots + a_n \sin b_n) \sin x$. Din $f(0) = 0$ rezultă $a_1 \cos b_1 + a_2 \cos b_2 + \ldots + a_n \cos b_n = 0$, deci

$$f(x) = -(a_1 \sin b_1 + \ldots + a_n \sin b_n) \sin x.$$

Pentru $\alpha \in \mathbf{Q}^*$ avem $\alpha \neq k\pi$ deci $\sin \alpha \neq 0$. Prin urmare din $f(x) = 0$ rezultă $a_1 \sin b_1 + \ldots + a_n \sin b_n = 0$.

68. 1) Graficele celor două funcții sînt indicate în Fig. V, 3.

2) $$\max_{x \in \mathbf{R}} \min(\sin x, \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\min_{x \in \mathbf{R}} \max(\sin x, \cos x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

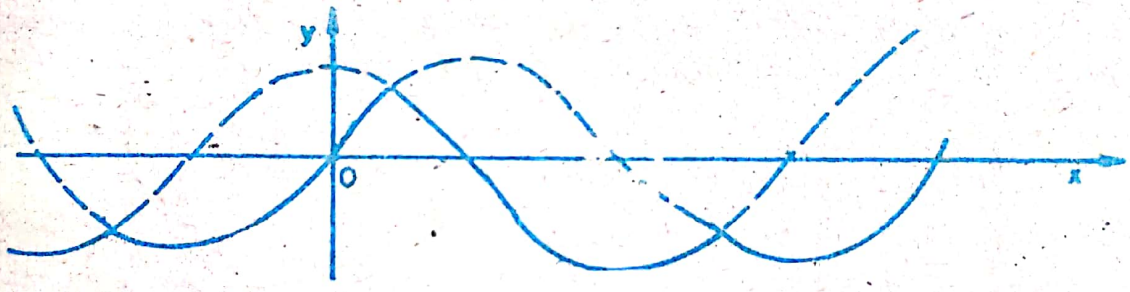


Fig. V, 3

70. 1) Inecuația este echivalentă cu $\sin y \cos x \geqslant 0$. Ținînd seama de semnul funcțiilor sin și cos avem

$y \in [0, \pi)$ dacă și numai dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$y \in [\pi, 2\pi]$ dacă și numai dacă $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

b) Fig. V, 4; c) Fig. V, 5.

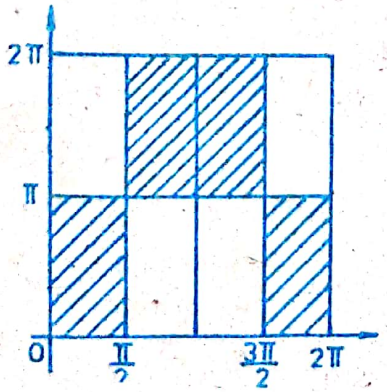


Fig. V, 4

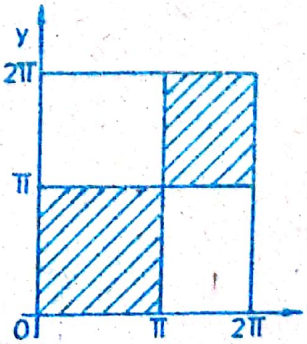


Fig. V, 5

71. $S_1 = \dfrac{\sin \dfrac{nt}{2} \sin\left[x + (n-1)\dfrac{t}{2}\right]}{\sin \dfrac{t}{2}}$; $S_2 = \dfrac{\sin n\dfrac{t}{2} \cos\left[x + (n-1)\dfrac{t}{2}\right]}{\sin \dfrac{t}{2}}$.

72. 2) $\operatorname{tg} 2^{n+1} - \operatorname{tg} 1$.

73. Aducînd la o formă mai simplă suma din prima parte a egalității, obținem

$$\frac{\sin (2n+1)\dfrac{\pi}{9} - \sin \dfrac{\pi}{9}}{2 \sin \dfrac{\pi}{9}} = \cos \frac{\pi}{9}$$

ceea ce se mai scrie

$$\sin (2n+1)\frac{\pi}{9} = \sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{18} = \cos \frac{4\pi}{9}.$$

Se obține $n = 9k + 2$, $k \in \mathbf{Z}$.

74. Se demonstrează inegalitatea pentru $n = 2$, apoi prin inducție matematică se arată că inegalitatea este adevărată pentru orice $n = 2^k$, $k \in \mathbf{N}^*$. Fie acum n un număr natural oarecare și fie p un număr natural astfel încît $p = 2^k$ și $n < p$. Pentru a demonstra că inegalitatea este adevărată pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aplicăm rezultatul obținut pentru sistemul de p numere

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \ldots, \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}_{p - n \text{ numere}}.$$

Rezultă:

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n + (p-n) \sin \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}{p} \leqslant$$

$$\leqslant \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + (p-n)\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}{p}$$

inegalitate care este echivalentă cu inegalitatea ce trebuie demonstrată.

Cazul 2) se tratează analog.

75. Se ține seama de inegalitățile afirmate în exercițiul precedent.

76. Avem $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \cos (a_i - a_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \cos a_i \cos a_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sin a_i \sin a_j =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \cos a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin a_i\right)^2 \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

77. 1) $x = \pi$, $y = 0$; 2) $x = -\frac{\pi}{3}$, $y = 0$; 3) $x = \frac{5\pi}{4}$, $y = 1$;

4) $x = -\frac{5\pi}{4}$, $y = -1$.

78. 1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $x \in [0, \pi]$; 3) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $x \in (0, \pi)$.

80. Pentru a demonstra că $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ observăm că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ și atunci din faptul că $\operatorname{arcctg} x \in (0, \pi)$ rezultă $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

81. 1) Notăm $\operatorname{arctg} x = y$; pentru că $x > 0$ rezultă $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} y = x$, deci $\operatorname{ctg} y = \frac{1}{x}$, de unde $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

2) Notăm $\operatorname{arctg} x = y$; întrucît $x < 0$ rezultă $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, de unde $y + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Din $\operatorname{tg} y = x$ rezultă $\operatorname{tg}(y + \pi) = x$, deci $\operatorname{ctg}(y + \pi) = \frac{1}{x}$, de unde $y + \pi = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

82. Ținem seama de exercițiul precedent și avem:

Pentru $x > 0$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Pentru $x < 0$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

83. Avem $\arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dacă și numai dacă $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Prima egalitate implică $\cos\left(\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ de unde rezultă $a \geqslant 0$. Relația $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ implică $\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geqslant 0$ deci $b \geqslant 0$. Prin urmare egalitatea din enunț este adevărată pentru orice pereche $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ cu $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ și $a^2 + b^2 \neq 0$ (și numai pentru asemenea perechi).

Scanned with OKEN Scanner

84. 1) Fie $x \in [0, 1]$; există $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ astfel încît $x = \sin t$. Rezultă $\pi - t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ deci $\pi - t = \arcsin x$ de unde $t = \pi - \arcsin x$. Înlocuind, rezultă $f(x) = (\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x$.

2) Considerăm funcțiile $g : [0, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $g(x) = \pi - \arcsin x$ și $h : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \left[-\frac{\pi^2}{4}, 0\right]$, $h(x) = x^2 - \pi x$. Avem $f = h \circ g$, iar funcțiile h și g sînt bijective, de unde rezultă că și f este bijectivă.

85. Ținem seama că dacă $\alpha \in [-1, 1]$ atunci

$\arcsin \alpha = \beta$ dacă și numai dacă $\sin \beta = \alpha$ și $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$\arccos \alpha = \beta$ dacă și numai dacă $\cos \beta = \alpha$ și $\beta \in [0, \pi]$.

Deci:

$\arcsin (\sin x) = x$ dacă și numai dacă $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$\arcsin (\sin x) = x - 6\pi$ dacă și numai dacă $\sin (x - 6\pi) = \sin x$ și $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 6\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$, dacă și numai dacă $x \in \left[\frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right]$;

$\arccos (\cos x) = x$ dacă și numai dacă $x \in [0, \pi]$;

$\arccos (\cos x) = x + 2\pi$ dacă și numai dacă $\cos (x + 2\pi) = \cos x$ și $0 \leqslant x + 2\pi \leqslant \pi$, dacă și numai dacă $x \in [-2\pi, -\pi]$;

$\arcsin (\sin x) = \pi - x$ dacă și numai dacă $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;

$\arccos (\cos x) = \pi - x$ dacă și numai dacă $x = \frac{\pi}{2}$.

86. Funcția $f_1 : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}$ admite perioada π iar pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f_1(x) = x$. Se obține graficul din fig. V, 6.

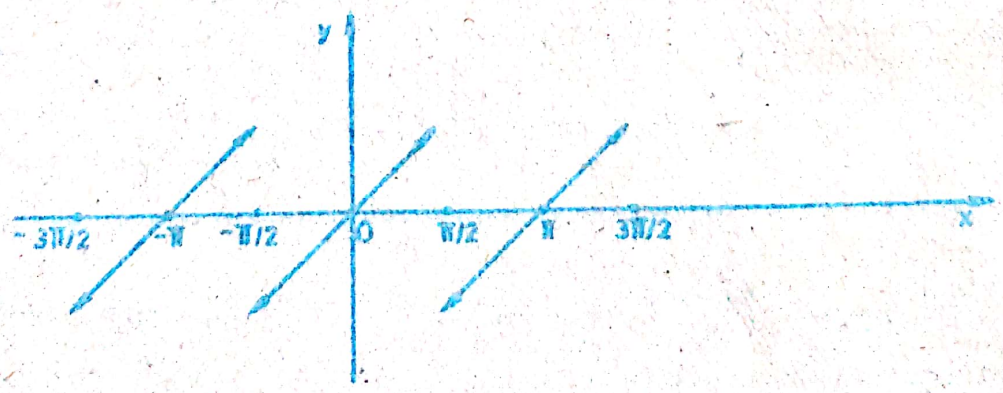


Fig. V, 6

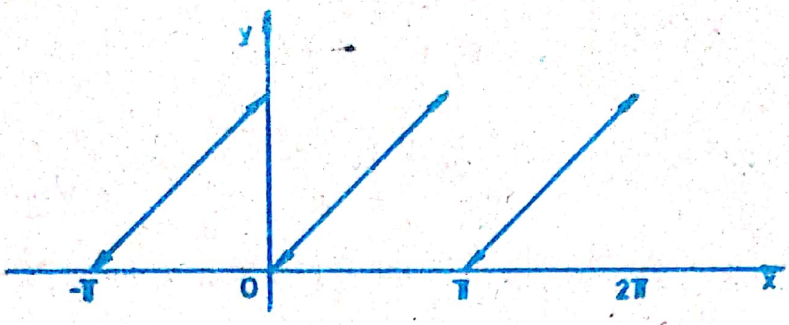


Fig. V, 7

Funcția $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ admite perioada 2π și pentru orice $x \in (0, \pi)$, $f_2(x) = x$. Graficul funcției f_2 este în figura V, 7.

Funcția f_3 admite perioada 2π. Pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $f_3(x) = x$. Pentru $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ notăm $\arcsin(\sin x) = y$ deci $\sin y = \sin x$ și $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de unde rezultă $y = x - \pi$. Reprezentăm grafic funcția pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ apoi ținem seama de periodicitate (fig. V, 8).

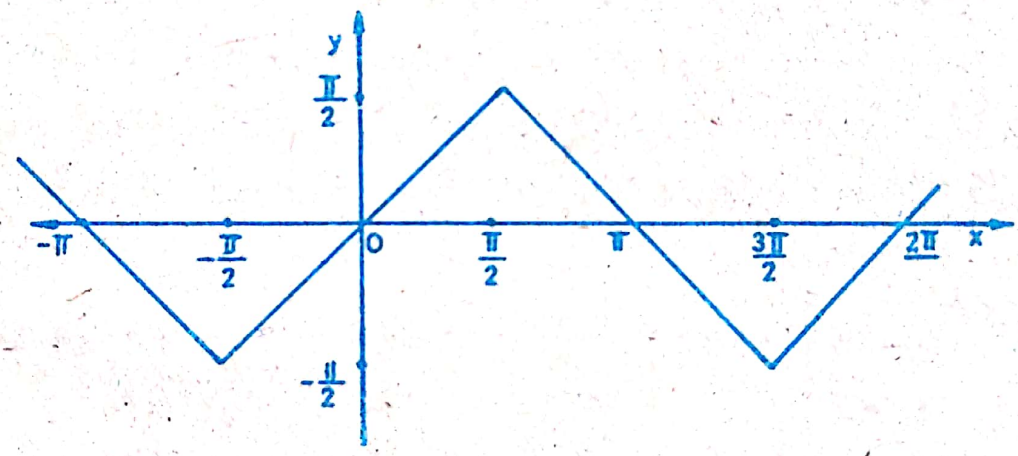


Fig. V, 8

Funcția f_4 admite perioada 2π. Pentru $x \in [0, \pi]$ avem $f_4(x) = x$. Pentru $x \in [\pi, 2\pi]$ notăm $\arccos(\cos x) = y$ deci $\cos x = \cos y$ și $y \in [0, \pi]$ de unde rezultă $x = 2\pi - y$. Obținem graficul din (fig. V, 9).

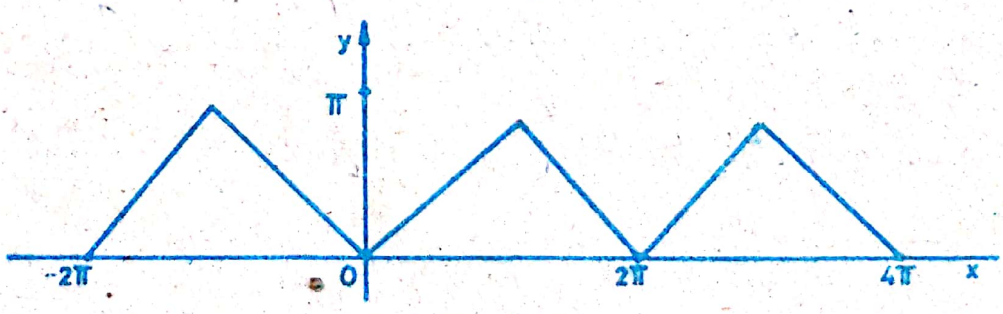


Fig. V, 9

87. Scriem $f(x)$ sub forma $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Obținem:

$$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \; f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

88. 1) Notăm $\sin x = y$; deci $\sin(\pi - x) = y$ și $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezultă $\pi - x = \arcsin y$ și inversa lui f este $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$.

2) $g^{-1}: [-1, 1] \to [\pi, 2\pi]$, $g^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x$.

89. Notăm $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = a$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} = b$ și demonstrăm că $\operatorname{tg}(2a - b) = 0$, de unde rezultă $\sin(2a - b) = 0$.

90. 1) Notăm $\operatorname{arcctg} x = \alpha$ și $\operatorname{arcctg}(x + 1) = \beta$. Pentru a demonstra că $\alpha - \beta = \operatorname{arcctg}(x^2 + x + 1)$ este suficient să demonstrăm că $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = x^2 + x + 1$ și $\alpha - \beta \in (0, \pi)$. În primul caz utilizăm formula $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$. Deoarece funcția arcctg este strict crescătoare avem $\alpha > \beta$. Întrucît $0 < \beta < \alpha < \pi$ rezultă $0 < \alpha - \beta < \pi$.

2) În egalitatea de la punctul 1) se dau lui x pe rînd valorile $1, 2, \ldots, n$.

Capitolul VI

ECUAȚII ȘI INECUAȚII TRIGONOMETRICE

1. 1) $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{1}{2}(2k - 1)$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) $x = \frac{1}{2}(2k + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$. 4) nu are soluție; 5) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 6) $x = (-1)^k \arcsin\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 7) $x \in \left\{\frac{\pi}{2}(4k - 1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{10}(4k - 1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$; 8) $x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se caută numărul de puncte în care dreapta de ecuație $y = 0$ intersectează graficul funcțiilor sin, cos, tg și ctg. Ecuațiile $\sin x = x$ și $\cos x = x$ au cîte o singură soluție iar ecuațiile $\operatorname{tg} x = x$ și $\operatorname{ctg} x = x$ au fiecare o infinitate de soluții.

3. Punem condițiile de existență: $x \neq (2k+1)\pi$ și $x \neq \frac{k\pi}{6}$ unde $k \in \mathbf{Z}$. Ecuația se mai scrie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$ deci $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - 6x + n\pi$ de unde rezultă $x = (2n+1)\frac{\pi}{13}$, $n \in \mathbf{Z}$. Pentru ca $(2n+1)\frac{\pi}{13}$ să fie soluție a ecuației, este necesar să avem $(2n+1)\frac{\pi}{13} \neq (2k+1)\pi$ și $(2n+1)\frac{\pi}{13} \neq \frac{k\pi}{6}$, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$. Ambele condiții exprimă însă necesitatea ca $2n+1$ să nu fie divizibil cu 13, adică n să nu fie de forma $13p+6$, cu $p \in \mathbf{Z}$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației date este:

$$\left\{(2n+1)\frac{\pi}{13} \mid n \in \mathbf{Z},\ n \neq 13p+6,\ p \in \mathbf{Z}\right\}.$$

4. Ecuația $\arcsin(\sin x) = a$ are soluții dacă și numai dacă $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; în acest caz ecuația este echivalentă cu $\sin x = \sin a$, deci $x = (-1)^k a + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația $\arccos(\cos x) = a$ are soluție dacă și numai dacă $a \in [0, \pi)$; $x = a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = a$ are soluție dacă și numai dacă $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; deci $x = a + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = a$ are soluție dacă și numai dacă $a \in (0, \pi)$; deci $x = a + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

1) $(-)^k \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^{k+1}\frac{1}{10} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 3) nu are soluții; 4) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 5) nu are soluții; 6) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 7) $\frac{\pi}{10} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 8) nu are soluții; 9) $\frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 10) $2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 11) nu are soluții.

Scanned with OKEN Scanner

5. Ecuația este echivalentă cu $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-1)$, deci $x = -1 + k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z}$. Singura soluție rațională, -1, se obține pentru $k = 0$.

6. 1) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

2) $x \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{(4k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

3) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$;

4) $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

5) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

6) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$;

7) $x \in \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(4k+1)\pi}{6} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup$
$\cup \left\{\frac{(4k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

8) $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

9) $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

10) $x \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{(4k-1)\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup$
$\cup \left\{\frac{(4k-1)\pi}{4} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

7. Ecuațiile nu sînt echivalente. Prima este echivalentă cu ecuația $(\sin 5x - \cos x)(\cos 3x + \cos x) = 0$ iar a doua este echivalentă cu ecuația

$$\frac{\sin 5x(\cos 3x + \cos x)}{\cos 5x(\cos 3x + \cos x)} = 1.$$

Notînd $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin 5x = \cos 5x\}$ și $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos 3x + \cos x = 0\}$, mulțimea soluțiilor primei ecuații este $A \cup B$ în timp ce mulțimea soluțiilor celei de-a doua este $A \setminus B$. Rezultă:

1) $x \in \left\{\frac{(4k+1)\pi}{20} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

2) $x \in \left\{\frac{(4k+1)\pi}{20} \mid k \in \mathbf{Z},\ 4k+1 \neq 5p,\ p \in \mathbf{Z}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

8. $x \in \left\{\frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pm \arccos\left(\pm\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

9. Se folosesc formulele de transformare a sumelor în produse.

1) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{6} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

2) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{2\pi}{30} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

3) $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{11}\right\}$.

10. Condiţiile de existenţă sînt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ şi $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Exprimînd tg $2x$ şi sin $2x$ în funcţie de tg x şi notînd tg $x = t$ obţinem ecuaţia $t(t^4 - 4t^2 - 1) = 0$, care are soluţiile reale $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Deci soluţiile ecuaţiei iniţiale sînt elementele mulţimii

$$\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\pm \operatorname{arctg}\sqrt{2 + \sqrt{5}} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

11. 1) sin (sin x) $= 0$ implică sin $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; dar $|\sin x| \leqslant 1$, deci ecuaţia sin $x = k\pi$ are soluţii numai pentru $k = 0$ deci $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$; 2) cos(cos x) $= 0$ implică cos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; întrucît $\left|\frac{\pi}{2} + k\pi\right| > 1$ oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$, această ecuaţie nu are soluţii; 3) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) nu are soluţii.

12. Arătăm că ecuaţia sin(sin x) = cos(cos x)nu are soluţii. Ecuaţia se mai scrie $\sin(\sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right)$, deci $\sin x = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, rezultă $\sin x + \cos x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, dar această ecuaţie nu are soluţii căci $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2} \leqslant \left|\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi orice $n \in \mathbf{Z}$. Pentru $k = 2n + 1$ rezultă $\sin x - \cos x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ecuaţie care de asemenea nu are nici o soluţie.

Scanned with OKEN Scanner

13. 1) $x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{10} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{20} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{16} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

2) $x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{6} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{12} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{20} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

3) Se scrie $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ apoi se transformă în produs. Soluția ecuației este $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{11} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{7} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

14. $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

15. 1) $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{\sin x}{|\sin x|} = -1\right\} = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x < 0\} =$

$= \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$;

2) $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$;

3) $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$.

16. Presupunînd prin absurd că ar exista o soluție x, ar rezulta $\sin x = 1$ și $\sin(x-1) = 0$ adică $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ și $x - 1 = k'\pi$ pentru anumiți $k, k' \in \mathbf{Z}$, ceea ce nu este posibil căci ar implica $\pi = \frac{2}{4k - 2k' + 1} \in$ $\in \mathbf{Q}$, contradicție.

17. Condițiile de existență sînt: $x \neq \frac{\pi}{6}(2n+1)$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$ și $x \neq \frac{\pi}{8}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Observînd că $\frac{1}{\cos x \cos 2x} +$ $+ \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} = \frac{2}{\cos 3x}$, ecuația devine $2 \cos 4x + 1 = 0$, de unde

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \text{ cu } k \in \mathbf{Z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)$ se mai scrie $\pm 1=3(2n+1)-3k$ și este îndeplinită pentru orice n și k întregi căci $3(2n+1)-3k$ este divizibil cu 3 în vreme ce ± 1 nu este. Condiția $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\neq\frac{\pi}{6}(2n+1)$ se mai scrie $\pm 1+3k\neq 2n+1$ și este îndeplinită pentru orice $n\in\mathbf{Z}$ dacă și numai dacă k este impar. Deci mulțimea de soluții este

$$\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{(2n+1)\pi}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}.$$

18. $m=-\frac{1}{6}$; $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\pm\arccos\left(\frac{2}{3}\right)+\right.$

$\left.+(2k+1)\pi\mid k\in\mathbf{Z}\right\}$.

19. Ecuația este echivalentă cu $\frac{x}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Soluțiile sînt 0 și $\pm\frac{\pi}{2}$.

20. 1) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{3}{4}$. Pentru a avea egalitate ar trebui ca $\sin 4x=1$ și $\sin 2x\cos 4x=-1$.

Dar aceste egalități nu pot avea loc simultan căci $\sin 4x=1$ implică $\cos 4x=0$.

2) $2\mid\sin x\mid\sin^2\frac{x}{5}\leqslant 2$ iar $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$, dar egalitățile $2\mid\sin x\mid\sin^2\frac{x}{5}=$

$=2$ și $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ nu pot avea loc simultan.

21. 1) $\sin^4 x+\cos^7 x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Deci ecuația dată este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases}\sin^4 x=\sin^2 x\\ \cos^7 x=\cos^2 x.\end{cases}$$

Ecuația $\cos^7 x=\cos^2 x$ are soluțiile $\frac{\pi}{2}+k\pi$ și $2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Acestea satisfac și ecuația $\sin^4 x=\sin^2 x$, deci sînt soluțiile ecuației date.

Scanned with OKEN Scanner

2) Ecuația se mai scrie $\sin^4(\pi - x) + \cos^7(\pi - x) = 1$ și ținînd seama de rezolvarea ecuației de la punctul a), rezultă soluțiile $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ și $x = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

22. Fiecare ecuație are mulțimea de soluții $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

23. Condițiile de existență sînt: $x \neq \frac{k\pi}{6}$ și $x \neq \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Scriind ecuația sub forma

$$\frac{\cos 3x \sin 6x + \cos 5x \sin 2x}{\sin 2x \sin 4x \sin 6x} = -\frac{\cos 4x}{\sin 6x \sin 8x}$$

obținem

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (valori care nu verifică condițiile de existență) și

$$x = \frac{2n\pi}{9} \quad \text{și} \quad x = \frac{(2n + 1)\pi}{7}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Avem $\frac{2n\pi}{9} \neq \frac{k\pi}{6}$ dacă și numai dacă $4n \neq 3k$, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$. Pentru aceasta este necesar și suficient ca n să nu fie multiplu de 3. Avem $\frac{2n\pi}{9} \neq \frac{k\pi}{8}$ dacă și numai dacă $16n \neq 9k$, condiție îndeplinită dacă n nu se divide cu 3.

Avem $\frac{(2n + 1)\pi}{7} \neq \frac{k\pi}{6}$ dacă și numai dacă $6(2n + 1) \neq 7k$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru aceasta este necesar și suficient ca $2n + 1$ să nu fie multiplu de 7, adică $n \neq 7p + 3$, $p \in \mathbf{Z}$. În acest caz este îndeplinită și condiția $\frac{(2n + 1)\pi}{7} \neq \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$. Prin urmare mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este

$$\left\{\frac{2n\pi}{9} \mid n \neq 3p,\ n,\ p \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2n + 1)\pi}{7} \mid n \neq 7p + 3,\ n,\ p \in \mathbf{Z}\right\}.$$

24. $\{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = [\sin x]\} = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x \in \mathbf{Z}\} = \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos x = [\cos x]\}$.

Scanned with OKEN Scanner

25. 1) Ecuația se mai scrie $\operatorname{arctg} 2x = \operatorname{arctg}(x^2 - 3)$ și din injectivitatea funcției arctg rezultă $2x = x^2 - 3$ deci $x_1 = -1$ și $x_2 = 3$.

2), 3). Ținem seama de exercițiul **82**, cap. V. Ecuația $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{2\pi}{3}$ nu are soluții iar ecuația $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ are ca mulțime de soluții intervalul $(0, \infty)$.

4) Ținem seama că $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Rezultă $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

26. Pentru $p = 1/2$ ecuația nu are soluții. Pentru $p \neq 1/2$ obținem $x = \operatorname{arctg} \frac{p-2}{1-2p} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

27. Cum $1 + \sin^2 ax \geqslant 1$ și $\cos x \leqslant 1$, soluțiile ecuației sînt acele numere reale x care verifică simultan condițiile $\sin ax = 0$ și $\cos x = 1$, adică $ax = n\pi$ și $x = 2m\pi$ cu $m, n \in \mathbf{Z}$. Rezultă $2am = n$.

Dacă $a \in \mathbf{Q}$, $a = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbf{Z}$, atunci $\frac{n}{m} = \frac{2p}{q}$ și există o infinitate de perechi $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ care satisfac această condiție ($n = 2pl$, $m = ql$, $l \in \mathbf{Z}$). Pentru $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ egalitatea poate avea loc numai pentru $m = n = 0$. Deci ecuația are soluție unică ($x = 0$) dacă și numai dacă a este irațional.

28. 1) Ecuația este echivalentă cu $\sin \frac{11x}{2} \sin 5x = 0$. Soluția este

$$\left\{\frac{2k\pi}{11} \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z}\right\};$$

2) $\left\{\frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbf{Z},\ k \neq 10p,\ p \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{11} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

29. Considerăm funcția definită prin formula $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x}$ având domeniul maxim de definiție $\mathbf{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Ținînd seama de semnul funcțiilor sin și cos avem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ pentru } x \in \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \text{ pentru } x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi\right) \\ -2 \text{ pentru } x \in \left((2k+1)\pi,\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \text{ pentru } x \in \left((2k+1)\pi + \frac{\pi}{2},\ 2(k+1)\pi\right) \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci ecuația are soluții pentru $m \in \{-2, 0, 2\}$. Pentru $m = -2$ soluția este $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left((2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, pentru $m = 0$ soluția este

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left((2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2(k+1)\pi\right)\right),$$

iar pentru $m = 2$ soluția este $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

30. Ecuația se mai scrie $2 \cos x \cos \alpha = 1$. Pentru $\cos \alpha = 0$ (adică $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$) ecuația nu are soluții; dacă $\cos \alpha \neq 0$ ecuația este echivalentă cu $\cos x = \frac{1}{2 \cos \alpha}$, deci pentru a avea soluție este necesar și suficient ca $\left|\frac{1}{2 \cos \alpha}\right| \leqslant 1$, adică $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. Soluția ecuației este în acest caz $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2 \cos \alpha}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

31. Ecuația este echivalentă cu sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \cos \pi x = 1 \\ \cos \pi^2 x = 1. \end{cases}$$

Din prima rezultă $x = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ iar din a doua $x = \frac{2k'}{\pi}$, $k' \in \mathbf{Z}$. Egalitatea $2k = \frac{2k'}{\pi}$ este posibilă numai pentru $k = k' = 0$, deci singura soluție este $x = 0$.

32. Se poate înmulți membrul drept al ecuației cu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pentru a se obține o ecuație omogenă în $\sin x$ și $\cos x$. Rezultă:

$$x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

33. Vezi exercițiul **37** cap. V. Ecuația are soluții dacă și numai dacă $m \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

Pentru $m = -2$, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left((2k-1)\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m = -1$, $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ (2k+1)\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ 2(k+1)\pi\right)\right]$.

Pentru $m = 0$, $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Pentru $m = 1$, $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

34. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $[\sin x] + [\cos x] \leqslant 1$ și $2^{1-|\sin x|} \geqslant 1$, deci ecuația este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} [\sin x] + [\cos x] = 1 \\ |\sin x| = 1 \end{cases}$$

și soluția este $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

35. Întrucît $[\sin x] \in \{-1, 0, 1\}$, mulțimea soluțiilor ecuației este reuniunea soluțiilor sistemelor:

$$\text{I} \begin{cases} \sin x < 0 \\ -1 \leqslant \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} 0 \leqslant \sin x < 1 \\ 0 \leqslant \operatorname{tg} x < 1 \end{cases} \qquad \text{III} \begin{cases} \sin x = 1 \\ 1 \leqslant \operatorname{tg} x < 2. \end{cases}$$

Sistemul III nu are soluții. Soluția ecuației este:

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right).$$

36. 1) Ecuația dată se mai scrie:

$$\sin x + \sin 3x = 2\sqrt{\sin x \sin 3x}.$$

Condițiile de existență sînt $\sin x \sin 3x \geqslant 0$ și $\sin x + \sin 3x \geqslant 0$, adică $\sin x \geqslant 0$ și $\sin 3x \geqslant 0$. Ridicînd ambii membri la pătrat obținem $(\sin x - \sin 3x)^2 = 0$ cu soluțiile $x = k\pi$ și $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; $x = k\pi$ verifică condițiile de existență iar pentru $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ numai soluțiile din cadranele I și II verifică aceste condiții. În concluzie:

$$x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2) $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

37. 1) Făcînd în ambele ecuații substituția $\sin x = y$ obținem ecuațiile:

$$y[4y^2 + (4 - 2|a|)y + a - 3] = 0 \quad (1)$$

$$2y^2 - y = 0 \quad (2)$$

Ecuația (2) are soluțiile 0 și $\frac{1}{2}$, deci pentru ca ecuațiile trigonometrice să fie echivalente este necesar și suficient ca și ecuația (1) să admită aceste soluții și, dacă mai are o soluție, aceasta să aibă modulul mai mare decît 1. Ecuația (1) admite soluția $\frac{1}{2}$ dacă și numai dacă $a = |a|$, adică $a \geqslant 0$. În acest caz rădăcinile ecuației (1) sînt $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{a-3}{2}$. Este necesar să avem sau $\frac{a-3}{2} = 0$ sau $\frac{a-3}{2} = \frac{1}{2}$ sau $\left|\frac{a-3}{2}\right| > 1$. Deci valorile lui a pentru care ecuațiile sînt echivalente sînt: $a = 3$, $a = 4$, $0 \leqslant a < 1$, $a > 5$.

2) Prima ecuație admite soluții de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; punînd condiția ca a doua ecuație să fie verificată de $x = k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z}$, rezultă $a \in \{0, 1, -1\}$. Se analizează fiecare din cele 3 situații. Ecuațiile sînt echivalente pentru $a = -1$.

38. 1) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} \leqslant 2 \leqslant 2^x + 2^{-x}$, deci ecuația este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 2\cos^2 \dfrac{x^2+x}{6} = 2 \\ 2^x + 2^{-x} = 2. \end{cases}$$

Singura soluție, $x = 0$, a ecuației a doua este soluție și pentru prima ecuație.

2) Ecuația se mai scrie $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$ și $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$, deci soluțiile ecuației verifică simultan condițiile:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Rezultă $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

39. 1) Ecuația este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} \sin mx = 1 \\ \cos nx = 1. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima ecuație a sistemului are soluție numai pentru $m \neq 0$:

$mx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. A doua ecuație necesită ca $nx = 2k'\pi$ cu $k' \in \mathbf{Z}$.

Deci pentru ca ecuația inițială să aibă soluție este necesar ca $\frac{n}{m} = \frac{2k'}{2k + \frac{1}{2}} =$

$= \frac{4k'}{4k+1} = \frac{\mathcal{M}4}{\mathcal{M}4+1}$. Această condiție este de asemenea suficientă.

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

40. Aplicînd inegalitatea mediilor avem:

$$1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

$$1 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y};$$

(inegalitățile devin egalități dacă și numai dacă $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = 1$). Înmulțind cele două relații membru cu membru rezultă

$$(1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(1 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) \geqslant 9,$$

cu egalitate pentru $x = y = \frac{\pi}{4}$.

41. Considerăm cazul $m > 0$, $n > 0$. Pentru orice x și y reali avem $m \sin x + n \cos y \leqslant m + n$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $\sin x = \cos y = 1$, deci:

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, 2k_2\pi\right); \text{ cu } k_1, k_2 \in \mathbf{Z}.$$

În cazul $m < 0$, $n < 0$, înmulțind ecuația cu -1 se ajunge la cazul deja analizat.

42. Pentru orice x și y reali avem $|\sin(x \pm y)| = |\sin x \cos y \pm \cos x \sin y| \leqslant |\sin x \cos y| + |\cos x \sin y| \leqslant |\cos x| + |\cos y|$. Inegalitatea $|\sin x \cos y| + |\cos x \sin y| \leqslant |\cos x| + |\cos y|$ devine egalitate dacă și numai dacă $|\sin x| = |\sin y| = 1$ deci pentru

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ și } y = \frac{\pi}{2} + k'\pi \text{ cu } k, k' \in \mathbf{Z}.$$

În acest caz avem și

$$|\sin x \cos y \pm \cos x \sin y| = |\sin x \cos y| + |\cos x \sin y|.$$

Scanned with OKEN Scanner

43. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y \geqslant 2\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg}^2 y \geqslant$

$$\geqslant 4 \geqslant 3 + \sin^2(x + y).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă:

$$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y;\ \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1;\ \sin^2(x + y) = 1.$$

Din primele două ecuații obținem:

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{4},\ y = (2n + 1)\frac{\pi}{4},\ \text{cu } n, k \in \mathbf{Z}.$$

Înlocuind în ultima ecuație obținem $\sin^2(k + n + 1)\frac{\pi}{2} = 1$, deci $k + n$ trebuie să fie un număr par. Rezultă:

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{4},\ y = (4m - 2k + 1)\frac{\pi}{4},\ \text{cu } m, k \in \mathbf{Z}.$$

44. Transformînd în produs și împărțind ecuațiile obținem $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = -1$ de unde $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Prin înlocuire în prima ecuație găsim $x = \pm\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ deci $y = \mp\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2(k - n)\pi$ cu $k, n \in \mathbf{Z}$ arbitrari.

45. Sistemul se mai scrie:

$$\begin{cases} 2 \sin x \cos y = a \\ 2 \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

Dacă $a = b = 0$ atunci x poate fi orice număr real și $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Dacă $|a| > 2$ sau $|b| > 2$ sistemul nu are soluții.

Presupunem în continuare că $|a| \leqslant 2$ și $|b| \leqslant 2$. Dacă $a \neq 0$ și $b = 0$ rezultă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ și $y = \pm\arccos\frac{(-1)^k a}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$ rezultă $x = k\pi$ și $y = \pm\arccos\frac{(-1)^k b}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$ rezultă $x = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} + k\pi$ și găsim $\cos y = \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația are soluție ($y = \pm \arccos\left(\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$) dacă și numai dacă $a^2 + b^2 \leqslant 4$. Deci mulțimea perechilor (a, b) pentru care ecuația are soluții este $\{(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid a^2 + b^2 \leqslant 4\}$ (discul închis cu centrul în origine și de rază 2).

46. 1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ y = \frac{\pi}{3} \pm n\pi,\ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ y = -\frac{13\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ y = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

47. Deoarece pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ și orice $y \in \mathbf{R}$ avem $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2 \geqslant 2 \sin^2 y$, rezultă că sistemul dat este echivalent cu:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \\ \sin^2 y = 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Soluțiile sînt:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ z = \frac{\pi}{2} + n\pi;\ k, m, n \in \mathbf{Z}.$$

48. Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avem $|\cos\alpha - \cos\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$ egalitatea avînd loc numai pentru $\alpha = \beta$. Scăzînd primele două ecuații ale sistemului avem

$$\cos x_1 - \cos x_2 = x_2 - x_3$$

de unde, ținînd seama de inegalitatea de mai sus, deducem

$$|x_1 - x_2| \geqslant |x_2 - x_3|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog se demonstrează că

$$|x_2 - x_3| \geqslant |x_3 - x_4|$$
$$|x_3 - x_4| \geqslant |x_4 - x_5|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_{n-1} - x_n| \geqslant |x_n - x_1|$$
$$|x_n - x_1| \geqslant |x_1 - x_2|$$

de unde rezultă

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \ldots = |x_n - x_1|.$$

Conform problemei **16**, cap. IV, din relaţia de mai sus obţinem

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

şi deci sistemul dat este echivalent cu sistemul

$$\cos x_i = x_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dar ecuaţia $\cos x = x$ are soluţie unică. (Valoarea ei aproximativă poate fi aflată prin metodele analizei matematice.)

49. Relaţia $\cos y = x$ implică $-\frac{\pi}{2} < -1 \leqslant x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, deci $\cos x > 0$, adică $y > 0$. Analog se arată că $x > 0$. Cele două ecuaţii implică

(1) $$\cos(\cos x) = x$$

şi cum $\cos x \in (0,1) \subset [0, \pi]$, ecuaţia (1) este echivalentă cu

(2) $$\cos x = \arccos x.$$

Întrucît graficele funcţiilor

$$f_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1], \quad f_1(x) = \cos x$$

$$f_2 : [0,1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f_2(x) = \arccos x$$

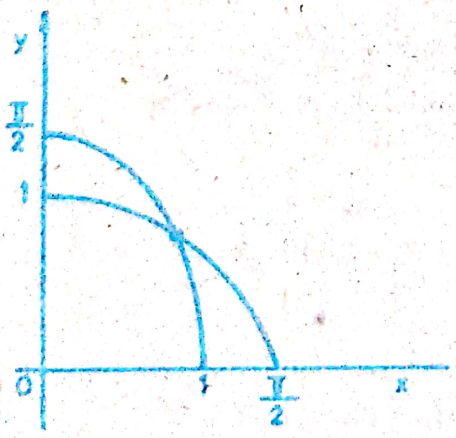


Fig. VI, 1

au un singur punct comun (fig. VI, 1), rezultă că ecuaţia (2) are o soluţie unică. Cele două ecuaţii ale sistemului dat mai implică

$$\cos y = \arccos y$$

şi din unicitatea soluţiei ecuaţiei (2) rezultă $x = y$.

Scanned with OKEN Scanner

50. 1) $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\{\left[2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[(2k+1)\pi,\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$;

2) $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ \frac{\pi}{12} + (k+1)\pi\right)$;

3) $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$;

4) $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\{\left(k\pi,\ \frac{(4k+1)\pi}{4}\right] \cup \left((2k+1)\frac{\pi}{2},\ \frac{(4k+3)\pi}{4}\right]\right\}$.

51. $\Delta = 1 - \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$.

1) $\varphi \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2},\ 2(k+1)\pi\right)$;

2) $\varphi \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$;

3) $\varphi \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

52. 1) $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

2) $x \in \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$.

3) Nu are soluţii căci pentru orice x real avem

$$\min(\sin x,\ \cos x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

53. $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

54. 1) $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right]$; 2) $x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right]$; 3) $x \in (-\infty,\ 1)$;

4) $x \in (-\infty,\ 0)$.

55. 1) $x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$;

2) $x \in \left[-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right]$;

3) $x \in (-\infty,\ 0)$;

4) $x \in \left[-2,\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - 1\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

56. $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

57. Avem:

$$\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{36}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{36}\right) \ldots \sin\left(x + \frac{35\pi}{36}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{18}} \sin 2x \sin\left(2x + \frac{\pi}{18}\right) \sin\left(2x + \frac{2\pi}{18}\right) \ldots \sin\left(2x + \frac{17\pi}{18}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{27}} \sin 4x \sin\left(4x + \frac{\pi}{9}\right) \sin\left(4x + \frac{2\pi}{9}\right) \ldots \sin\left(4x + \frac{8\pi}{9}\right) =$$

$$= \frac{-1}{2^{33}} \sin(12x + \pi) \sin\left(12x + \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(12x + \frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{35}} \sin 36x$$

(pentru ultimele două egalităţi am ţinut seama de formula din exerciţiul 20 din capitolul precedent). Deci ecuaţia se mai scrie:

$$\frac{1}{2^{35}} \sin 36x = \frac{1}{2^{36}}$$

şi soluţia ei este:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{216} + \frac{k\pi}{36},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Capitolul VII

ARIILE SUPRAFEŢELOR PLANE

1. Fie d_1, d_2 şi d_3 distanţele lui M la dreptele BC, AB respectiv AC. Avem $\sigma[MBC] + \sigma[MAC] + \sigma[MAB] = \sigma[ABC]$ de unde rezultă $d_1 + d_2 + d_3 = h$, h fiind lungimea unei înălţimi. Deoarece PQ trece prin centrul de greutate rezultă că $h = 3d_1$ şi astfel $2d_1 = d_2 + d_3$.

2. Rezultă că E şi F sînt pe laturile $|AB|$ şi $|AC|$. Se obţine $\|EF\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Considerăm că două laturi nu sînt congruente şi deducem mediatoarea celei de a treia laturi care va intersecta cercul în două puncte. Se constată că triunghiul determinat de unul din aceste puncte şi latura a treia are aria mai mare ca cel dat.

5. 1) Se foloseşte formula $\sigma[ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2}$, unde h_a este lungimea înălţimii din A şi se calculează h_a cu ajutorul teoremei lui *Pitagora* generalizată. 2) Fie G centrul de greutate pentru ABC şi $|AM|$ mediana din A. Se consideră D astfel că M este mijlocul lui $|GD|$ şi rezultă $3\sigma[ABG] = 3\sigma[BDG] = \sigma[ABC]$. Ţinem seamă că $\|DG\| = \|AG\| = \frac{2}{3} m_a$, $\|BD\| = \|CG\| = \frac{2}{3} m_c$ etc. Din 1) rezultă $\sigma[BDG] = \sqrt{\tilde{p}\left(\tilde{p} - \frac{2}{3}m_a\right)\left(\tilde{p} - \frac{2}{3}m_b\right)\left(\tilde{p} - \frac{2}{3}m_c\right)}$ unde $3\tilde{p} = m_a + m_b + m_c$ şi înlocuind obţinem formula cerută.

6. 1) Se aplică teorema lui *Ceva* şi rezultă $\|EC\| : \|EA\| = \|FB\| : \|FA\|$ de unde $FE \parallel BC$. 3) Rezultă $\sigma[EBC] = \sigma[FBC]$ şi scădem $\sigma[BDC]$.

7. Fie mediana $|AM|$ şi $G \in |AM|$ intersecţia medianelor în ABC. Considerăm $P \in |AM$ astfel încît M este mijlocul lui $|PG|$. Rezultă $\|PB\| = \|CG\|$ şi astfel $\triangle BPG$ are lungimile laturilor 2/3 din lungimile laturilor $\triangle A'B'C'$, deci $\sigma[A'B'C'] = \frac{9}{4}\sigma[BPG]$. Mai observăm că $\sigma[BPG] = \sigma[BCG] = \frac{1}{3}\sigma[ABC]$.

8. Se observă că raza cercului înscris este $r = p - a$, unde p este semiperimetrul şi că $\|BM\| = p - b$, $\|CM\| = p - c$.

10. Presupunem că dreapta care trece prin centrul cercului înscris şi prin centrul de greutate al triunghiului este paralelă cu latura de lungime b. Atunci $3r = h_b$. Mai avem $2\sigma[ABC] = b \cdot h_b$ şi $\sigma[ABC] = r \cdot p$, de unde $2b = a + c$. Reciproc, din $a + c = 2b$ rezultă $p = \frac{3b}{2}$. Cu acelaşi raţionament ca mai sus găsim $3r = h_b$, deci centrul cercului înscris şi centrul de greutate sînt la egală distanţă de AC.

11. Fie O centrul cercului înscris în triunghiul ABC, G centrul de greutate, $\{D\} = GO \cap AC$, $\{E\} = GO \cap BC$. Din condiţia problemei rezultă că $|CD| = |CE|$. Notăm $\|CD\| = x$, h_a, h_b lungimile înălţimilor triunghiului ABC corespunzătoare vîrfurilor A şi B, r raza cercului înscris. Avem $\sigma[CDE] = \sigma[CDG] + \sigma[CEG] = h_b \cdot x/6 + h_a \cdot x/6$. Dar, pe de altă parte

Scanned with OKEN Scanner

avem $\sigma[CDE] = \sigma[CDO] + \sigma[CEO] = \frac{1}{2} rx + \frac{1}{2} rx$. Rezultă că $\frac{1}{3}(h_a + h_b) = 2r$. Dar avem $\frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = rp = S$, unde $S = \sigma[ABC]$, de unde rezultă relația cerută.

12. Notăm cu x, y, z distanțele de la un punct M interior triunghiului ABC la laturile $|BC|$, $|AC|$, $|AB|$ respectiv (fig. VII, 1). Notînd $S = \sigma[ABC]$ avem $S = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$ sau $ax + by + cz = 2S$. Produsul xyz este maxim, cînd $ax \cdot by \cdot cz$ este maxim. Aceasta are loc, cînd $ax = by = cz = \frac{2S}{3}$ de unde rezultă că $x = \frac{2S}{3a} = \frac{ah_a}{3a} = \frac{h_a}{3}$, $y = \frac{h_b}{3}$, $z = \frac{h_c}{3}$ unde h_a, h_b, h_c sînt lungimile înălțimilor triunghiului ABC. Deducem că punctul căutat este centrul de greutate al triunghiului ABC.

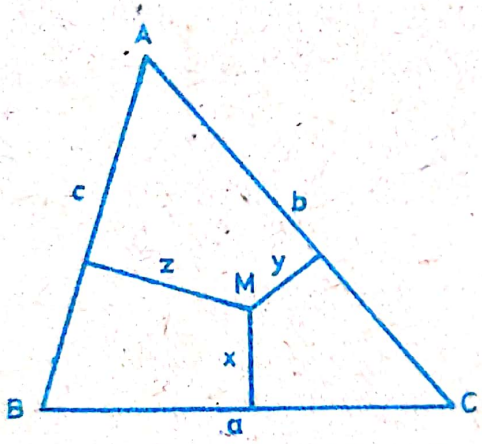


Fig. VII, 1

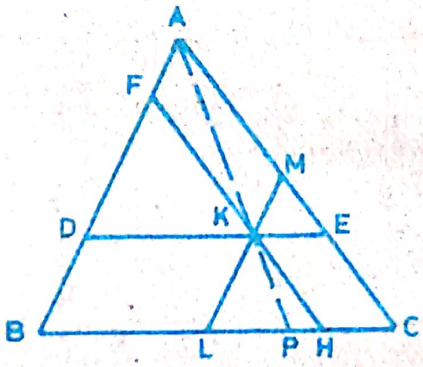


Fig. VII, 2

13. Prin K ducem dreptele d_1, d_2 și d_3 paralele cu BC, AC, AB. Notăm $\{D\} = d_1 \cap AB$, $\{E\} = d_1 \cap AC$, $\{F\} = d_2 \cap AB$, $\{H\} = d_2 \cap BC$ $\{L\} = d_3 \cap BC$ și $\{M\} = d_3 \cap AC$. Pe latura $|BC|$, L este între B și H, iar H este între L și C. Într-adevăr, fie $\{P\} = |AK \cap |BC|$. Atunci $LK \parallel BA$ implică faptul că $L \in |BP|$ *(Pasch)*. La fel rezultă $H \in |PC|$. Patrulaterul $BDEC$ se descompune astfel în paralelogramele $BDKL$, $CHKE$ și triunghiul KLH. Procedînd la fel deducem că Int ABC este partiționat în șase suprafețe poligonale, între care trei triunghiulare (fig. VII, 2). Mai observăm că triunghiurile KLH, KDF și KME sînt asemenea cu triunghiul ABC și au ariile S_1, S_2, S_3 respectiv S. Notînd $a = \|LH\|$, $b = \|BL\|$, $c = \|CH\|$ avem $\|BC\| = a + b + c$ și rezultă $\sqrt{S}/\sqrt{S_1} = a/(a+b+c)$, $\sqrt{S}/\sqrt{S_2} = b/(a+b+c)$, $\sqrt{S}/\sqrt{S_3} = c/(a+b+c)$, de unde se obține formula cerută.

14. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, $A_1B_1C_1$ triunghiul ortic și O centrul cercului circumscris. În patrulaterul OB_1AC_1, $|AO| \perp |B_1C_1|$ deoarece $m(\widehat{OAB}) = 90 - m(\hat{C})$ și $\widehat{AC_1B_1} \equiv \hat{C}$ implică $m(\widehat{AKC_1}) = 90$ unde $\{K\} = AO \cap B_1C_1$. Rezultă că $\sigma[OB_1AC_1] = \frac{1}{2} \|AO\| \cdot \|B_1C_1\| = \frac{1}{2} R \cdot \|B_1C_1\|$. Analog $\sigma[OC_1BA_1] = \frac{1}{2} R \cdot \|A_1C_1\|$, $\sigma[OA_1CB_1] = \frac{1}{2} R \cdot \|A_1B_1\|$. Deci $\sigma[ABC] = \frac{1}{2} R(\|A_1B_1\| + \|B_1C_1\| + \|A_1C_1\|)$. Dar raza cercului celor 9 puncte $R_9 = \frac{1}{2} R$ și deci $\sigma[ABC] = R_9 (\|A_1B_1\| + \|B_1C_1\| + \|A_1C_1\|)$.

15. Fie $OM \perp AC$, $M \in |AC|$, $ON \perp BC$, $N \in |BC|$. Atunci $\|OC\|^2 = \|OM\|^2 + \|ON\|^2$, $\|OA\|^2 = \|OM\|^2 + \|AM\|^2$, $\|OB\|^2 = \|ON\|^2 + \|BN\|^2$ de unde rezultă că $\|OA\|^2 + \|OB\|^2 = \|OM\|^2 + \|ON\|^2 + \|AM\|^2 + \|BN\|^2$ (1). Dar $\sigma[OBC] = \frac{1}{3} \sigma[ABC]$ de unde rezultă că $\|ON\| = \frac{1}{3} \|AC\|$ și deci $\|AM\| = \|AC\| - \|CM\| = 3\|ON\| - \|ON\| = 2\|ON\|$. Analog $\|BN\| = 2\|OM\|$ și (1) devine relația din enunț.

17. Fie $A_1 \in |OX$ și $B_1 \in |OY$ astfel încît M este mijlocul segmentului A_1B_1. Considerăm o dreaptă d astfel că $\{A\} = d \cap |OX$ și $\{B\} = d \cap |OY$ (fig. VII, 3). Din axioma de separare știm că dacă $A \in |OA_1|$ atunci $B_1 \in |OB|$.

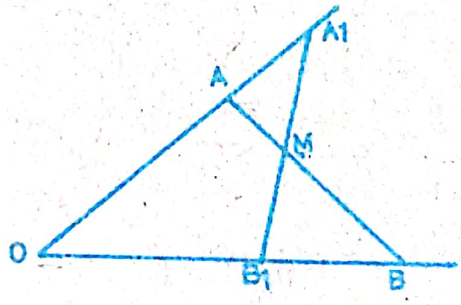


Fig. VII, 3

Avem $\frac{\sigma[OAM] - \sigma[OA_1M]}{\sigma[OMB_1] - \sigma[OMB]} = \frac{\sigma[AMA_1]}{\sigma[BMB_1]} = \frac{\|AM\|}{\|BM\|} = \frac{\sigma[OAM]}{\sigma[OBM]}$ unde $\sigma[OA_1M] = \sigma[OMB_1]$. Deducem relația $\frac{1}{\sigma[AMO]} + \frac{1}{\sigma[BMO]} = \frac{2}{\sigma[OMA_1]}$.

18. Notînd cu H ortocentrul lui ABC observăm că se formează paralelogramele $BHCA'$, $CHAB'$ și $AHC'B$. Dacă ABC este optuzunghic proprietatea nu mai este adevărată.

19. Notînd cu n rapoartele date rezultă $\|AB\| : \|AM\| = n + 1$, $\|AC\| : \|AN\| = (n + 1)/n$, $\|MN\| : \|PM\| = (n + 1)/n$, $\|MN\| : \|PN\| = n + 1$. Rezultă:

$$(1) \quad \frac{\sigma[ABC]}{\sigma[AMN]} = \frac{\|AB\|}{\|AM\|} \cdot \frac{\|AC\|}{\|AN\|} = \frac{(n+1)^2}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și analog (2) $\frac{\sigma[BMP]}{\sigma[AMN]} = \frac{n^2}{n+1}$ și (3) $\frac{\sigma[CNP]}{\sigma[AMN]} = \frac{1}{n(n+1)}$. Scăzînd (2) și (3) din (1), obținem $\frac{\sigma[AMN] + \sigma[BPC]}{\sigma[AMN]} = \frac{(n+1)^3 - n^3 - 1}{n(n+1)} = 3$, de unde rezultatul cerut.

20. Notînd $\sigma[ABC] = S$ rezultă $\sigma[ABM] = \frac{\|BM\|}{\|BC\|} \cdot S$, $\sigma[ABX] = \frac{\|AX\|}{\|AM\|} \cdot \sigma[ABM]$ de unde rezultă că $\sigma[ABX] = \frac{\|BM\|}{\|BC\|} \cdot \frac{\|AX\|}{\|AM\|} \cdot S$. (1) Din ipoteză $\frac{\|BC\|}{\|BM\|} = \frac{\|BM\| + \|MC\|}{\|BM\|} = 1 + \frac{1}{K} = \frac{K+1}{K}$ (2). Aplicînd teorema lui *Menelaus* triunghiului ACM, intersectat de dreapta BN (fig. VII, 4), rezultă $\frac{\|AN\|}{\|NC\|} \cdot \frac{\|CB\|}{\|BM\|} \cdot \frac{\|MX\|}{\|XA\|} = 1$ sau $\frac{\|AN\|}{\|CN\|} \cdot \frac{\|MC\| + \|BM\|}{\|BM\|} \cdot \frac{\|MX\|}{\|XA\|} = 1$. Din ultima relație, ținînd seama că $\frac{\|AN\|}{\|NC\|} = \frac{\|MC\|}{\|BM\|} = \frac{1}{K}$ obținem $\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K} + 1\right)\frac{\|MX\|}{\|XA\|} = 1$ sau $\frac{\|AX\|}{\|XM\|} = \frac{K+1}{K^2}$. Mai avem $\frac{\|AX\|}{\|AM\|} = \frac{\|AX\|}{\|AX\| + \|XM\|} = \frac{K+1}{K^2+K+1}$ (3). Substituind valorile rapoartelor $\frac{\|BM\|}{\|BC\|}$, $\frac{\|AX\|}{\|AM\|}$ din (2) și (3) în (1) obținem

$$\sigma[ABX] = \frac{K}{K^2+K+1} \cdot S.$$

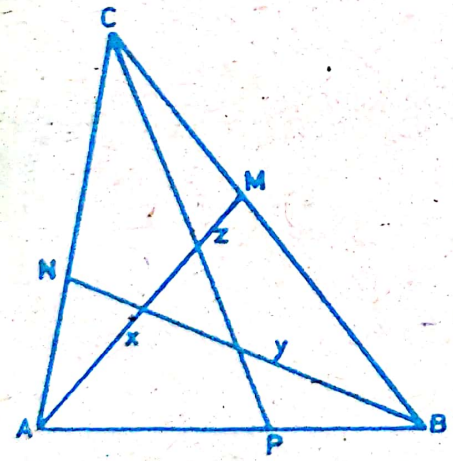


Fig. VII. 4

Analog

$$\sigma[BCY] = \sigma[ACZ] = \frac{K}{K^2+K+1} \cdot S.$$

Deoarece

$$\sigma[XYZ] = S - (\sigma[ABX] + \sigma[BCY] + \sigma[CAZ])$$

rezultă că

$$\sigma[XYZ] = S - \frac{3K}{K^2+K+1} \cdot S.$$

În final, avem $[\sigma XYZ] = \frac{(K-1)^2}{K^2+K+1} \cdot S.$

21. 2) $\triangle EGD \sim \triangle BGC$ și rezultă astfel că $4\sigma[EGD] = \sigma[BCG]$. Mai avem $3\sigma[BGC] = \sigma[ABC]$ și $4\sigma[AED] = \sigma[ABC]$ ș.a.m.d.

22. Exprimînd aria triunghiului în două feluri, în ipotezele noastre rezultă $2a^2 = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ de unde deducem $5a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{3b^2c^2 - b^4 - c^4}$ și astfel problema are soluții

dacă $3b^2c^2 \geq b^4 + c^4$ (1). Inegalitatea (1) este echivalentă cu $\frac{2}{1+\sqrt{5}} \leq \frac{b}{c} \leq$ $\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (2). Dacă $b = c$ rezultă $a = 2b/\sqrt{5}$. Dacă $b \neq c$ deducem din (1) că $b + c > a$, deci există două triunghiuri pentru care ambele inegalități din (2) au loc pentru semnul $<$ și un triunghi cînd cel puțin una din inegalitățile (2) devine egalitate.

23. Dacă scriem în două feluri aria patrulaterului $ABMC$ obținem $by + cz + aR = (b + c)x$.
Notînd $\{A'\} = OA \cap \mathcal{C}(O, R)$ în patrulaterul $ABA'C$ relația lui *Ptolomeu* ne dă $bz + cy = aR$. Din cele două relații obținem $y + z = x$.

24. Fie BC dreapta căutată ($B \in h$, $C \in k$), O vîrful unghiului și ME, MF paralelele prin M la laturile unghiului ($E \in h$, $F \in k$). În triunghiul OBC dreapta ME taie $|BC|$ și nu taie $|OC|$, deci taie $|OB|$ *(Pasch)* adică $E \in |OB|$. La fel, $F \in |OC|$. Notăm $s = \sigma[OEM] = \sigma[OFM]$, $s_1 = \sigma[EBM]$, $s_2 = \sigma[FMC]$, $x = \|MB\|$, $y = \|MC\|$.
Dacă $x = y$ avem $s_1 = s_2 = s$, deci $\sigma[OBC] = 4s$. Dacă $x \neq y$ din $\triangle MEB \sim \triangle CFM$ rezultă $\frac{s_1}{s_2} = \frac{x^2}{y^2}$ (1) și din $\frac{\sigma[OMB]}{\sigma[OMC]} = \frac{\|MB\|}{\|MC\|}$ rezultă $\frac{s_1 + s}{s_2 + s} = \frac{x}{y}$ (2).
Din (1), (2) rezultă $s_1 = \frac{sx}{y}$, $s_2 = \frac{sy}{x}$ deci $\sigma[OBC] = 2s + s_1 + s_2 =$ $= s\left(2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) > 4s$. Deci $\sigma[OBC]$ = minimă cînd M este mijlocul lui $|BC|$ adică $BC \| EF$.

25. Notînd a_i și h_i ($i = 1, 2, 3$) lungimile laturilor, respectiv lungimile înălțimilor corespunzătoare avem $h_i > 2r$ sau $2Rh_i > 4Rr$ ($i = 1, 2, 3$). Mai avem $2h_1R = a_2a_3$, $2h_2R = a_1a_3$, $2Rh_3 = a_1a_2$, de unde deducem $a_ia_j > 4Rr (i \neq j)$ și astfel $a_1a_2a_3 > 8rR\sqrt{rR}$. Ținînd cont de formula bine cunoscută $4RS = a_1a_2a_3$ rezultă inegalitatea cerută.

26. Avem egalitatea $2S = ax + by + cz$ (1), unde $S = \sigma[ABC]$. Folosind identitatea $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4S^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, din (1) obținem că $x^2 + y^2 + z^2$ este minimă cînd $ay - bx = bz - cy = cx - az = 0$ adică $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

27. Se obține $a \geq \sqrt{a^2 - (b - c)^2}$ și avem egalitate pentru $b = c$.

28. 1) Se știe că aria unui triunghi este $S = pr$ sau $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ și pentru orice trei numere pozitive $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$ avem $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$. 2) Avem $p_1 = \frac{3r\sqrt{3}}{2}$ și inegalitatea rezultă din cea de la 1).

Scanned with OKEN Scanner

30. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC, cu h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor corespunzătoare și l_a, l_b, l_c distanțele de la un punct interior triunghiului la laturi. Presupunem, pentru a face o alegere că $a \geqslant b \geqslant c$. Atunci $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$ (1). Avem relația $2S = al_a + bl_b + cl_c$ (2), S fiind aria triunghiului considerat. Deoarece $c \leqslant a$, $c \leqslant b$ (3), atunci din (2) rezultă că $cl_a + cl_b + cl_c \leqslant 2S$ sau $l_a + l_b + l_c \leqslant 2\frac{S}{c}$. Dar $\frac{2S}{c} = h_c$ și deci $l_a + l_b + l_c \leqslant h_c$. Din (2) și (3) avem $al_a + al_b + al_c \geqslant 2S$ sau $l_a + l_b + l_c \geqslant \frac{2S}{a} = h_a$.

31. Fie $|AB|$ latura triunghiului ABC care este cea mai mare. Atunci $\|AB\| < 1$. Construim triunghiul echilateral ABC_1 (fig. VII, 5). Deoarece $\|AC\| \leqslant \|AC_1\|$ și $\|BC\| \leqslant \|BC_1\|$ atunci punctul C este interior cercului cu centrul în punctul A și de rază $\|AC_1\|$ și interior cercului cu centrul în punctul B și de rază $\|BC_1\|$. Rezultă că înălțimea triunghiului ABC nu este mai mare decît înălțimea triunghiului ABC_1 și cum ele au latura $|AB|$ comună rezultă că $\sigma[ABC] \leqslant \sigma[ABC_1]$, dar $4\sigma[ABC_1] = \|AB\|^2 \cdot \sqrt{3} < \sqrt{3}$ deci $4\sigma[ABC] < \sqrt{3}$.

32. 1) Notînd cu $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$, unde A este al treilea vîrf al triunghiului avem (vezi problema **5**) $4S^2 = [(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2]$. Rezultă că $b + c$ este minimă dacă $|b - c|$ este minimă, deci $b = c$. Rezultă că triunghiul este isoscel. 2) Se deduce din punctul precedent. 3) Dacă notăm cu l lungimea laturii pătratului și cu a lungimea laturii triunghiului obținem $4l^2 = a^2\sqrt{3}$ de unde deducem $3a > 4l$.

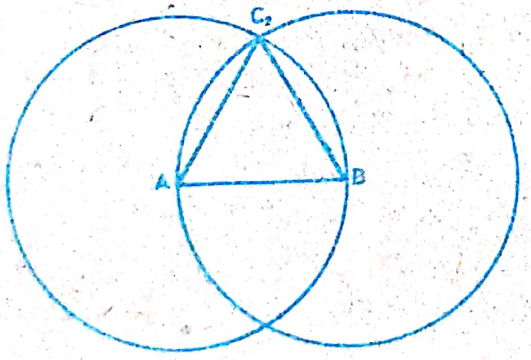


Fig. VII, 5

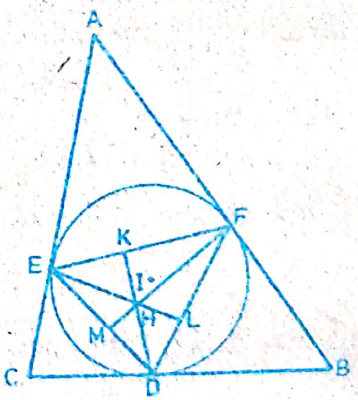


Fig. VII, 6

33. 1) Avem $ID \perp BC$, $IE \perp AC$ și $IF \perp AB$ (fig. VII, 6). Mai avem $2\sigma[ABC] = \|AB\| \cdot \|AC\| \cdot \sin \hat{A}$ și $2\sigma[EFI] = \|EI\| \cdot \|FI\| \cdot \sin \widehat{EIF}$; dar cum $\hat{A}$ și $\widehat{EIF}$ sînt suplementare deducem $\frac{\sigma[EIF]}{\sigma[ABC]} = \frac{r^2}{bc}$ unde am notat $a = \|BC\|$, $b = \|AC\|$, $c = \|AB\|$. Analog obținem încă două rapoarte

Scanned with OKEN Scanner

și prin sumare obținem $\frac{\sigma[DEF]}{\sigma[ABC]} = \frac{r^2(a+b+c)}{abc}$ și cum avem $2S = r(a+b+c)$ și $4RS = abc$ deducem 1). Ca să arătăm a doua relație observăm că $\triangle KLM \sim \triangle ABC$ deoarece $m(\widehat{LKM}) = 180 - 2\left(90 - \frac{m(\hat{A})}{2}\right)$ etc. Cercul circumscris triunghiului KLM este cercul *Euler* asociat triunghiului DEF, deci raza lui va fi $r/2$ așa încît raportul de asemănare al triunghiului este $2R/r$.

34. Fie $\|AB\| = a$. Atunci $\sigma[ABC] = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ și $\sigma[AKQ] = \sigma[BLM] = \sigma[NCP] = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (fig. VII, 7). Dar $\widehat{KAB} \in 120°$ deci $\widehat{AKL} \in 60°$. Dacă ducem $AA_1 \perp KL$, $A_1 \in KL$ atunci $\widehat{KAA_1} \in 30°$ și deci $\|KA_1\| = \frac{1}{2}\|AK\| = \frac{a}{2}$. Rezultă că $\|AA_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|KL\| = 2a$. Prin urmare $\sigma[AKLB] = \sigma[BMNC] = \sigma[CPQA] = \frac{1}{2}(a+2a)\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Rezultă prin proprietatea de aditivitate $\sigma[KLMNPQ] = 13\sigma[ABC]$.

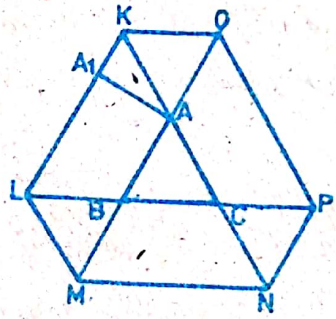


Fig. VII, 7

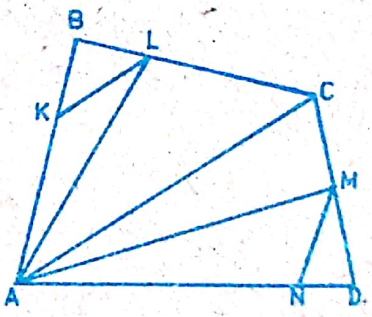


Fig. VII, 8

35. Fie S_1 aria triunghiului BKL, S_2 aria triunghiului MND (fig. VII, 8). Rezultă că $\sigma[AKL] = 2S_1$ și $\sigma[ABL] = 3S_1$. Avem apoi, că $\sigma[ALC] = 9S_1$ deoarece acest triunghi are aceeași înălțime ca triunghiul ABL și $\|LC\| = 3\|BL\|$. La fel rezultă că $\sigma[AMN] = 5S_2$, $\sigma[AMD] = 6S_2$ și $\sigma[ACM] = 6S_2$. Astfel aria patrulaterului $ABCD$ este $12S_1 + 12S_2 = 1$ de unde rezultă că $S_1 + S_2 = \frac{1}{12}$. Dar aria hexagonului $AKLCMN$ este egală cu aria patrulaterului $ABCD$ din care scădem $S_1 + S_2$, prin urmare este egală cu $\frac{11}{12}$.

Scanned with OKEN Scanner

36. Fie $\{P\} = AM \cap DK$ și $\{Q\} = BM \cap CK$. Se arată ușor că $PQ \parallel AB$. În triunghiurile dreptunghice APK și BQK avem ipotenuzele congruente și înălțimile corespunzătoare lor congruente. Deducem că $\| AP \| \cdot \| KP \| = \| BQ \| \cdot \| KQ \|$ și astfel $\triangle APK \equiv \triangle BQK$. Există două posibilități: 1) $\widehat{PKA} \equiv \widehat{QBK}$ și 2) $\widehat{PKA} \equiv \widehat{QKB}$. În cazul 1) rezultă $m(\widehat{AKP}) + m(\widehat{PKQ}) + m(\widehat{QKB}) = m(\widehat{PKA}) + 60 + 90 - m(\widehat{QBK}) = 150$ ceea ce este absurd. În al doilea caz obținem $m(\widehat{PKA}) = m(\widehat{QKB}) = 60$ și deducem că AMB este isoscel. Mediana $|MK|$ este și înălțime. Deducem $\| AK \| = \sqrt{3}$ și $\| DM \| = 1/\sqrt{3}$. Se obține $\sigma[ABCD] = 4/\sqrt{3}$.

38. Fie E mijlocul lui $|AB|$ și F mijlocul lui $|AD|$. Se observă că $\sigma[AEOF] = \sigma[AEMF] = \frac{1}{4}\sigma[ABCD]$ etc.

39. În cazul general se obține formula $\frac{R+r}{d^2}(\sqrt{d^2-(R-r)^2})^3$. Dacă cercurile sînt tangente sau sînt ortogonale se obțin formulele $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$, respectiv $\frac{2(R+r)Rr\sqrt{2Rr}}{R^2+r^2}$.

40. Fie a, b lungimile a două laturi ale dreptunghiului căutat. Avem $ab = S$, S fiind aria dreptunghiului. Atunci $2ab = 2S$. Astfel, suma $2a + b$ va fi minimă pentru $2a = b$. Rezolvînd sistemul $2ab = 2S$ și $2a = b$ obținem $b = \sqrt{2S}$, $a = \frac{\sqrt{2S}}{2}$. În acest caz suma căutată este $2\sqrt{2S}$.

41. Fie $\| BC \| = a$, $\| AP \| = h$, $\| MN \| = x$. Exprimăm aria dreptunghiului $KLMN$ în funcție de x. Din $\triangle AML \sim \triangle ABC$ avem $h \cdot \| LM \| = a(h-x)$. Rezultă $\sigma[KLMN] = \frac{ax(h-x)}{h}$ care se mai scrie $\sigma[KLMN] = \frac{a}{h}\cdot\left[\frac{h^2}{4} - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right]$. Această expresie are valoare maximă dacă $x = \frac{h}{2}$.

42. Avem $\frac{\sigma[AKB]}{\sigma[BKC]} = \frac{\| AK \|}{\| KC \|}$, $\frac{\sigma[BKC]}{\sigma[DKC]} = \frac{\| BK \|}{\| KD \|}$. Folosind relația din enunț obținem $\frac{\| AK \|}{\| KC \|} = \frac{\| BK \|}{\| KD \|}$ și cum $\widehat{AKB} \equiv \widehat{CKD}$ rezultă că $\triangle AKB \sim \triangle CKD$. În particular $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$, de unde rezultă că $AB \parallel DC$.

Scanned with OKEN Scanner

43. Fie $ABCD$ un trapez cu baza mare $|AB|$ și baza mică $|CD|$ de lungime a, respectiv b. Considerăm că $\hat{A}$ este ascuțit și $E \in |AB|$ astfel încît $|AE| \equiv |DC|$. Fie CK înălțimea din C în BCE (fig. VII, 9). Folosind teorema lui *Pitagora* generalizată în BCE obținem $\|KE\| = \dfrac{d^2 - c^2 + (a-b)^2}{2(a-b)}$ (1).

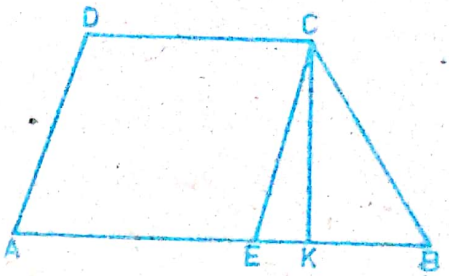


Fig. VII, 9

Din triunghiul dreptunghic CKE rezultă $\|BK\| = \sqrt{d^2 - \|KE\|^2}$, unde am notat $\|BC\| = c$ și $\|AD\| = d$. Aria trapezului este $\sigma[ABCD] = \dfrac{(a+b)\|KB\|}{2}$. Înlocuind $\|KE\|$ din (1), obținem

$$\sigma[ABCD] = \frac{a+b}{2(a-b)} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(-a+b+c+d)}.$$

45. Fie K proiecția lui B pe diagonala $|AC|$. Atunci avem $\sigma[ABCD] = \|AC\| \cdot \|BK\|$. Diagonala $|AC|$ este un diametru, deci are lungimea constantă. Avem $\|BK\| =$ maxim cînd K este centrul cercului circumscris și atunci avem un pătrat.

46. Se observă mai întîi că diagonalele celor două dreptunghiuri înscrise trec prin punctul de intersecție O al diagonalelor dreptunghiului $A_1A_2A_3A_4$. Rezultă că punctele B_3 și C_3 coincid. Mai mult, punctele B_2, B_4, C_2 și C_4 sînt situate pe cercul de diametru $|NM|$. Rezultă $|A_1B_4| \equiv |A_4C_4| \equiv |A_3A_2| \equiv |A_2C_2|$ și $B_4C_2 \parallel AB$. Prin urmare $\sigma[KB_3B_2] + \sigma[KB_3C_2] = \sigma[KB_3B_4] + \sigma[KB_3C_4] = \dfrac{1}{2}\sigma[A_1A_2A_2B_4] + \dfrac{1}{2}\sigma[B_4A_4A_3C_2] = \dfrac{1}{2}\sigma[A_1A_2A_3A_4]$.

47. Pătratul lungimii liniei mijlocii.

49. Se fixează punctul C. Să observăm că $\sigma[ACD]$ este maximă cînd distanța de la vîrful D la diagonala $|AC|$ este maximă, ceea ce se realizează cînd $|CD| \equiv |DA|$. La fel se arată că prin fixarea lui C, $\sigma[BCD]$ este maximă cînd $|BC| \equiv |CD|$. Deci trebuie să avem $|BC| \equiv |CD| \equiv |DA|$.

50. Presupunem că $r_1 = 1$. Atunci $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{2}{1}$ și deci $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Prin urmare $\|KB\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $m(\widehat{BOK}) = 45$, $m(\widehat{AOB}) = 90$ (fig. VII, 10).

Mai avem $\sigma[ALB] = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\pi - 1}{4}$.

Aria inelului $\text{Int}\,\mathcal{C}(O_1, r_1) \cap \text{Ext}\,\mathcal{C}(O, r)$ este $\dfrac{\pi}{2}$ și

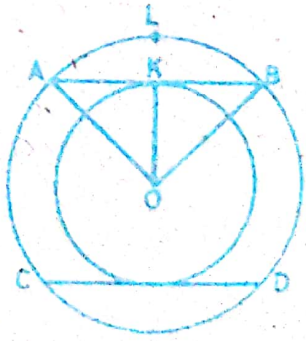


Fig. VII. 10

Scanned with OKEN Scanner

deci aria figurii f este $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - 1}{2} = \frac{1}{2}$. Latura pătratului înscris în $\mathcal{C}(O, r)$ are lungimea 1, și deci aria sa este 1.

51. Fie a, b dimensiunile laturilor dreptunghiului dat și $a < b$. Notînd $S = \sigma[ABCD]$ putem presupune $a < S$ (dacă $a \geq S$ construim un alt dreptunghi inclus în cel dat și care să aibă aria mai mare decît cea mai mică latură și facem construcția ce urmează pentru acesta). Împărțim latura de lungime a în n părți, deci există x astfel încît $a = nx$ și avem $b = mx + \varepsilon\, m$, $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon < x$. Rezultă $S = mnx^2 + a\varepsilon < mnx^2 + Sx$ de unde $mn > \frac{S}{x^2} - \frac{S}{x}$. În fiecare pătrat de latură x înscriem un cerc de rază $x/2$ și astfel obținem $R = \frac{x}{2}\, mn > \frac{x}{2}\left(\frac{S}{x^2} - \frac{S}{x}\right)$ de unde $R > \frac{S}{2x} - \frac{S}{2}$. Există x_0 astfel încît $S/2x_0 - S/2 > 1982$ (S este 1982 sau $S < 1982$ dacă este necesar pentru a avea $a < S$). Luînd razele cercurilor de lungime x_0, se obține $R > 1982$. Se poate micșora x_0 astfel încît să avem $R = 1982$.

52. Fie K mijlocul diagonalei $|BD|$, $|MN|$ segmentul paralel cu AC care trece prin K (fig. VII, 11) și $M \in |AD|$, $N \in |CD|$. Arătăm că pentru orice $O \in |MN|$ avem $\sigma[EBFO] = \sigma[HOGD] = \frac{\sigma[ABCD]}{4}$. Observăm că $\sigma[ABO] = 2\sigma[EBO]$, $\sigma[BCO] = 2\sigma[BFO]$. Deci $\sigma[ABCO] = 2\sigma[EBFO]$. Analog $\sigma[AOCD] = 2\sigma[HOGD]$. Rămîne de arătat că $[MN]$ este mulțimea punctelor O interioare patrulaterului $ABCD$ cu proprietatea $\sigma[ABCO] = \frac{\sigma[ABCD]}{2}$. Deoarece $MN \parallel AC$ rezultă că $\sigma[AOC] = \sigma[AKC]$ și deci $\sigma[ABCO] = \sigma[ABCK]$. Deoarece K este mijlocul lui $[BD]$, rezultă că $\sigma[ABK] = \frac{1}{2}\sigma[ABD]$, $\sigma[BCK] = \frac{1}{2}\sigma[BCD]$, adică $\sigma[ABCK] = \frac{\sigma[ABCD]}{2}$. Dacă $O \notin [MN]$, atunci fie $\{O'\} = BO \cap MN$. Deoarece patrulaterul $ABCD$ este convex, rezultă că $O' \notin [MN]$ (fig. VII, 12). Conform celor demonstrate mai

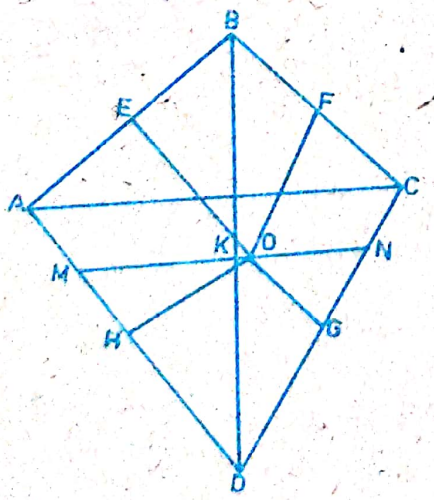


Fig. VII 11

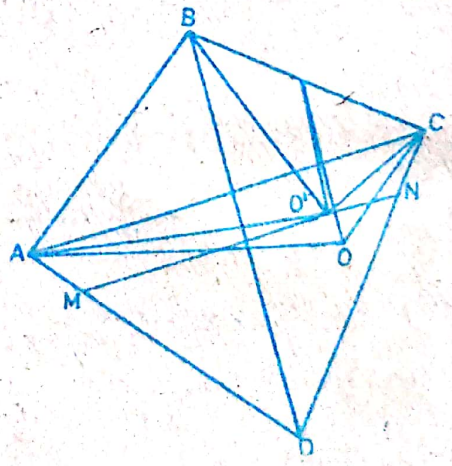


Fig. VII 12

sus, rezultă că $\sigma[ABCO'] = \frac{\sigma[ABCD]}{2}$ și deci $\sigma[ABCO] \neq \frac{\sigma[ABCD]}{2}$. Făcînd același raționament, dar schimbînd diagonala $|BD|$ cu diagonala $|AC|$, obținem că punctul căutat este intersecția a două drepte fiecare din ele trecînd prin mijlocul unei diagonale și fiind paralelă cu cealaltă. Patrulaterul $ABCD$ fiind convex acest punct este interior.

53. Din triunghiurile BCM, BMA și AMC rezultă $a^2 = \|MC\|^2 + \|MB\|^2 + \|MC\| \cdot \|MB\|$ și analoagele, din care deducem $2\Sigma\|MA\|^2 = \Sigma a^2 - \Sigma\|MA\| \cdot \|MC\|$ (unde Σ este sumarea naturală). Mai avem $2\sigma[AMC] = \|MA\| \cdot \|MC\| \cdot \sin 120°$ ($\sin 120° = \sqrt{3}/2$) și analoagele. Rezultă că avem $\sqrt{3} \cdot \Sigma\|MA\| \cdot \|MC\| = 4\Sigma\sigma[AMC] = 4\sigma[ABC] = 2ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{2}$, așa încît $2\Sigma\|MA\|^2 = \Sigma a^2 - \Sigma ab$. În concluzie $\|MG\|^2 = \frac{1}{2}\left(\Sigma\|MA\|^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2\right) = \frac{1}{18}(\Sigma a^2 - \Sigma 3ab)$. Deoarece $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ deducem $\|MG\|^2 = \frac{1}{9}(a^2+b^2-2ab)$ deci $\|MG\| = \frac{1}{3}|a-b|$.

54. Notăm $\sigma[MBC] = s_1$, $\sigma[MCA] = s_2$, $\sigma[MAB] = s_3$ (fig. VII, 13) Triunghiurile ABC și MBC au latura comună $|BC|$ și deci $\frac{\|AA_1\|}{\|MA_1\|} = \frac{s_1+s_2+s_3}{s_1}$. Din această relație rezultă că $\frac{\|AA_1\| - \|MA_1\|}{\|MA_1\|} = \frac{s_2+s_3}{s_1}$ sau $\frac{\|MA\|}{\|MA_1\|} = \frac{s_2}{s_1} + \frac{s_3}{s_1}$. Analog, avem $\frac{\|MB\|}{\|MB_1\|} = \frac{s_3}{s_2} + \frac{s_1}{s_2}$ și $\frac{\|MC\|}{\|MC_1\|} = \frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3}$. Adunînd membru cu membru aceste egalități obținem: $\frac{\|AM\|}{\|A_1M\|} + \frac{\|BM\|}{\|B_1M\|} + \frac{\|CM\|}{\|C_1M\|} = \left(\frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1}\right) + \left(\frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_1}\right) + \left(\frac{s_3}{s_1} + \frac{s_1}{s_3}\right) \geq 6$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $s_1 = s_2 = s_3$.

Înmulțind egalitățile avem:

$$\frac{\|AM\|}{\|A_1M\|} \cdot \frac{\|BM\|}{\|B_1M\|} \cdot \frac{\|CM\|}{\|C_1M\|} = \frac{(s_2+s_3)(s_3+s_1)(s_1+s_2)}{s_1s_2s_3} \geq$$

$$\geq \frac{2\sqrt{s_2s_3} \cdot 2\sqrt{s_3s_1} \cdot 2\sqrt{s_1s_2}}{s_1s_2s_3} = 8.$$

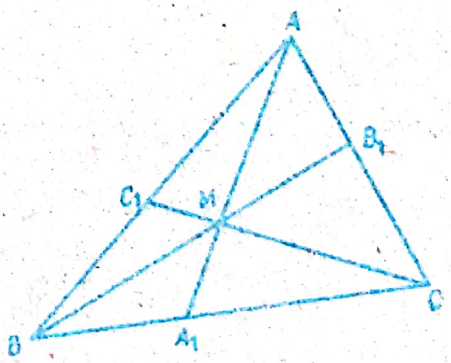


Fig. VII, 13

Scanned with OKEN Scanner

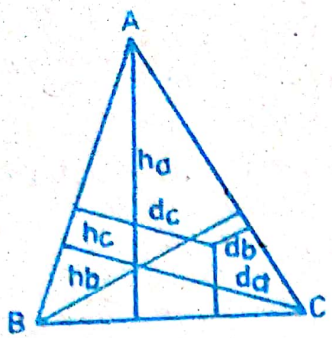


Fig. VII, 14

55. Fie h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor triunghiului și d_a, d_b, d_c distanțele punctului P la laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Ținînd seama de inegalitățile (fig. VII, 14) $h_a \leqslant \|PA\| + d_a$, $h_b \leqslant \|PB\| + d_b$, $h_c \leqslant \|PC\| + d_c$, rezultă că $a\|PA\| + b\|PB\| + c\|PC\| \geqslant a(h_a - d_a) + b(h_b - d_b) + c(h_c - d_c) = (ah_a + bh_b + ch_c) - (ad_a + bd_b + cb_c)$. Deoarece $ah_a = bh_b = ch_c = ad_a + bd_b + cd_c = 2\sigma[ABC]$ rezultă că: $a\|PA\| + b\|PB\| + + c\|PC\| \geqslant 4S$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $h_a = \|PA\| + d_a$, $h_b = \|PB\| + d_b$, $h_c = \|PC\| + d_c$. Rezultă astfel că P este situat pe fiecare din înălțimile triunghiului ABC, deci este punctul lor de intersecție.

56. Fie $\frac{\|AB_1\|}{\|B_1C\|} = m$, $\frac{\|CA_1\|}{\|A_1B\|} = n$, $\frac{\|BC_1\|}{\|C_1A\|} = p$ și presupunem că $m \geqslant n \geqslant p \geqslant 1$. În acest caz $\frac{\sigma[CA_1B_1]}{\sigma[A_1B_1C_1]} = \frac{n(1+p)}{1+mnp}$, de unde rezultă că $1 + mnp - n(1+p) \geqslant 1 + n^3 - n(1+n) = (1+n)(n-1)^2 \geqslant 0$ sau $\frac{\sigma[CA_1B_1]}{\sigma[A_1B_1C_1]} \leqslant 1$, adică $\sigma[C_1A_1B_1] \geqslant \sigma[CA_1B_1]$. Presupunem acum că $m \geqslant 1$ și $n \leqslant 1$. În acest caz $1 + mnp - n(1+p) = np(m-1) + (1-n) \geqslant 0$ și deci $\sigma[C_1A_1B_1] \geqslant \sigma[CA_1B_1]$.

57. Fie $[DE]$, $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ segmentul căutat. Notăm $\|AD\| = x$, $\|AE\| = y$, $\|DE\| = z$. Atunci $\sigma[ABC] = \frac{a^2}{2}\sin 60°$ și $\sigma[ADE] = \frac{a^2}{4}\cdot \sin 60°$ (1). Pe de altă parte $\sigma[ADE] = \frac{xy}{2}60°$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\frac{a^2}{2} = xy$ sau $y = \frac{a^2}{2x}$ (3). Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ADE și obținem $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60° = x^2 + a^2 - xy$ (4). Substituind expresia lui y din (3) în (4) obținem $z^2 = x^2 + \frac{a^4}{4x^2} - \frac{a^2}{2}$ (5). Deoarece $-\frac{a^2}{2}$ este constantă, rezultă că este necesar să studiem minimul funcției $f(x) = x^2 + \frac{a^4}{4x^2}$. Produsul $x^2 \cdot \frac{a^4}{4x^2} = \frac{a^4}{4}$ este constant și atunci minimul funcției f este atins în punctele x pentru care $x^2 = \frac{a^4}{4x^2}$ adică $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Substituind această valoare a lui x în (5) obținem $z_{min}^2 = \frac{a^2}{2}$; adică $z_{min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. În același mod obținem $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ceea ce înseamnă că triunghiul ADE este echilateral și deci $DE \parallel BC$.

58. Se procedează ca la problema **49.**

59. Suma ariilor triunghiurilor CP_1P_2, CP_2P_3, ..., $CP_{n-1}P_n$ este egală cu suma ariilor poligonului $P_1P_2 \ldots P_n$ și a triunghiului CP_1P_n (fig. VII, 15). Aria poligonului $P_1P_2 \ldots P_n$ nu depinde de C. Triunghiul CP_1P_n are arie maximă cînd C este situat la distanță maximă de dreapta P_1P_n. Rezultă că C trebuie să fie intersecția mediatoarei segmentului $|P_1P_n|$ cu semicercul care nu conține punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

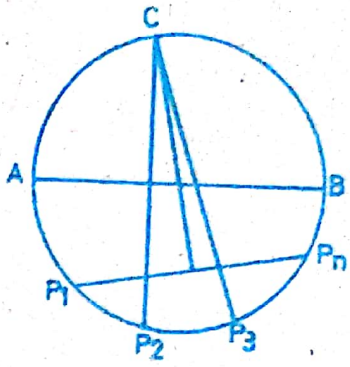


Fig. VII. 15

60. Știm că $S_n = nr^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$, $S_{2n} = nr^2\sin\frac{\pi}{n}$, $S_{4n} = 2nr^2\sin\frac{\pi}{2n}$.

Deci $S_{4n}^2 = 4n^2r^4\sin^2\frac{\pi}{2n} = 4n^2r^4\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2} = 2n^2r^4\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$; $S_{4n}^2(S_n + S_{2n}) = 2n^3r^6\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} = 2n^3r^6\sin^3\frac{\pi}{n} = 2S_{2n}^3$.

61. $\sigma[AEF] = \sigma[BEFC] \Leftrightarrow \sigma[AEF] = \frac{1}{2}\sigma[ABC]$. Dar $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ deci $\frac{1}{2} = \frac{\sigma[AEF]}{\sigma[ABC]} = \left(\frac{\|EA\|}{\|BA\|}\right)^2$ de unde $\frac{\|EA\|}{\|BA\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\|EA\|}{\|EB\| + \|EA\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\|EA\|}{\|EB\|}}{1 + \frac{\|EA\|}{\|EN\|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\|EA\|}{\|EN\|}(\sqrt{2} - 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{\|EA\|}{\|EB\|} = 1 + \sqrt{2}.$$

(Marcel Țena, Suplimentul de matematică al Revistei „Radioteleșcoală"/1978)

62. Fie T un punct situat pe cercul Γ astfel încît semidreapta $|AT$ este tangentă la cerc. Fie δ măsura unghiului format de dreapta mobilă AD și dreapta fixă AO, adică dacă $\delta = 0$ punctele A, O, D sînt coliniare iar dacă $\delta = \arcsin\frac{r}{R}$, dreptele AT și AD coincid. Se disting cazurile: $BC \cap \Delta \neq \emptyset$

și $BC \cap \Delta \neq \emptyset$. Pentru ultima situație, de exemplu, fie M și N punctele de intersecție dintre Γ și dreapta AD. Fie P piciorul perpendicularei din O pe MN. Înălțimea OP în MON se calculează din triunghiul APO.

(S. Dragomir, G.M. 5/1978)

63. Fie $A_1A' \perp A_2A_3$, $MM' \perp A_2A_3$. Rezultă imediat $\frac{\| MM_1 \|}{\| A_1B_1 \|} = \frac{\sigma[MA_2A_3]}{\sigma[A_1A_2A_3]}$ și încă două analoage care, prin adunare ne dau:

$$(1)\quad \frac{\| MM_1 \|}{\| A_1B_1 \|} + \frac{\| MM_2 \|}{\| A_2B_2 \|} + \frac{\| MM_3 \|}{\| A_3B_3 \|} = 1.$$

Pe de altă parte avem:

$$(2)\quad \frac{\| MM_i \|}{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} (\| A_iB_i \|)} \leqslant \frac{\| MM_i \|}{\| A_iB_i \|} \leqslant \frac{\| MM_i \|}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} (\| A_iB_i \|)}.$$

Din (1) și (2) rezultă inegalitățile cerute.

(Fl. Pîrvănescu, G.M. 2/1981)

64. Fie M_a' și A' respectiv proiecțiile punctelor M_a și A pe dreapta BC. Avem: $\frac{\| M_aD \|}{\| AD \|} = \frac{\| M_aM_a' \|}{\| AA' \|} = \frac{d(M, BC)}{d(A, BC)} = \frac{\sigma[MBC]}{\sigma[ABC]}$ și deci $\frac{\| AM_a \|}{\| AD \|} = 1 - \frac{\| M_aD \|}{\| AD \|} = 1 - \frac{\sigma[MBC]}{\sigma[ABC]}$. Atunci: $\sum \frac{\| AM_a \|}{\| AD \|} = 3 - \sum \frac{\sigma[MBC]}{\sigma[ABC]} = 3 - 1 = 2$.

(D. M. Bătineţu, G.M. 2—3/1982)

65. Fie patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ și $a_i = \| A_iA_{i+1} \|$, $i = \overline{1,4}(A_5 = A_1)$. Fie $\mathcal{C}(O, r) \subset \text{Int } A_1A_2A_3A_4$ și să notăm $d_i = d(O, A_iA_{i+1})$, $i = \overline{1,4}$. Avem $d_i > r$ și dacă notăm cu S, p aria și semiperimetrul patrulaterului, avem $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} a_id_i > rp$ (1). Dacă $b_2 = d(A_2, A_1A_3)$, $b_4 = d(A_4, A_1A_3)$ avem $S = \frac{1}{2}\| A_1A_3 \|(b_2 + b_4)$ (2). Din triunghiul $A_1A_2A_3$ rezultă $b_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ și la fel, $b_4 < \frac{1}{2}(a_3 + a_4)$, deci $b_2 + b_4 < p$ (3). Din (3), (2), (1) deducem: $\frac{1}{2}p \| A_1A_3 \| > S > rp$ deci $\| A_1A_3 \| > 2r$ și la fel $\| A_2A_4 \| > 2r$.

(L. Panaitopol, G.M. 8/1981)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

1. 1) $\cos B = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}$; 2) $b = 4$, $A = \frac{\pi}{3}$, $S = 6\sqrt{3}$, $r = \frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}$, $R = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

2. Se utilizează teorema sinusurilor.

3. 6 cm; 8 cm.

4. $a = 2\sqrt{21}$, $b = 10$, $c = 8$.

5. Aria este maximă cînd $\| AB \| = \| AC \|$; $S = \frac{25(1+\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}}$.

6. $c = \sqrt{3} + 1$, $S = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

7. Două posibilități: $\sqrt{21}$ sau $\sqrt{61}$ după cum unghiul $\hat{A}$ este ascuțit sau obtuz.

9. Trei: diagonalele d_1 și d_2 și unghiul α pe care ele îl formează. Aria este

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}.$$

10. 1) Găsim succesiv: $\| BD \| = a\sqrt{7}$, $\| BN \| = a\sqrt{3}$, $m(\widehat{NBC}) = 30$, $m(\widehat{ABN}) = 90$, $\| AN \| = 2a$, $\| AD \| = a\sqrt{7}$.

2) $\cos \widehat{ADB} = \frac{13}{14}$, $\sin \widehat{ADB} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ etc.

4) Din congruența triunghiurilor DBC și ADN deducem $\widehat{MDN} \equiv \widehat{DAM}$, ceea ce dovedește că CD este tangentă cercului ce trece prin A, M, D.

5) $S = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$.

6) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$. (se poate folosi rezultatul de la punctul 3) și problema 9).

11. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiurile ABD și ACD.

Scanned with OKEN Scanner

12. Se demonstrează că:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$$

și încă două relații analoage.

13. Înălțimea trapezului este 120 m și deci aria este 4,86 ha.

14. Arătăm că:

$$\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}.$$

15. Avem $A < \frac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $b^2 + c^2 > a^2$, dacă și numai dacă $(b+c)^2 - a^2 > 2bc$, dacă și numai dacă $p(b+c-a) > bc$, dacă și numai dacă $b + c - a - \frac{bc}{p} > 0$.

16. 1) Se aplică teorema sinusurilor. 2) Avem $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} < \frac{2bc}{b+c} \leqslant \frac{b+c}{2}$ și inegalitatea este strictă deoarece $\cos\frac{A}{2} \neq 1$.

17. 1) Pentru inegalitatea $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \leqslant abc$ notăm $b+c-a = x$, $a+c-b = y$, $a+b-c = z$ și inegalitatea devine

$$xyz \leqslant \frac{y+z}{2}\cdot\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}$$

ceea ce este evident, ținînd seama că $\frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz}$ etc.

Observație. Inegalitatea $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \leqslant abc$ este adevărată pentru orice a, b, c pozitive în timp ce inegalitatea

$$0 < (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

este adevărată dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi.

2) Avem $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$ și exprimînd S cu formula lui *Heron*, inegalitatea $R \geqslant 2r$ este echivalentă cu inegalitatea de la punctul 1).

3) Observînd că au loc relații de forma $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, se ajunge la inegalitatea de la punctul 1).

4) Se aplică teorema cosinusului.

Scanned with OKEN Scanner

5) Conform inegalității mediilor, $\sin A \sin B \sin C \leqslant \left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3$ iar din exercițiul **75**, cap. 5 se știe că $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6) Se aplică teorema mediilor.

7) Se aplică teorema sinusurilor.

8) $ab + bc + ca \geqslant \frac{9abc}{a+b+c} \geqslant \frac{9abc}{3R\sqrt{3}} = 4S\sqrt{3}$.

9) În inegalitatea $\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$ înlocuim $abc = 4RS = 4Rrp$.

10) Ținem seama de inegalitățile de la punctele 2) și 9).

11) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ și aplicăm inegalitatea 3).

Inegalitățile se transformă în egalități dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

18. 1) Se poate folosi asemănarea triunghiurilor ABC și $AB'C'$.

2) Pentru a demonstra inegalitatea $a \cos A + b \cos B + c \cos C \leqslant p$ se poate aplica teorema cosinusului.

3) Demonstrăm că aria S' a triunghiului ortic este dată de formula $S' = 2S \cos A \cos B \cos C$, unde S este aria triunghiului dat.

Inegalitățile 2) și 3) devin egalități dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

19. Folosind notațiile uzuale, avem:

$$\sigma[ABC] = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 16R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\sigma[A'B'C'] = 2R^2 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{A+C}{2} \sin \frac{B+C}{2} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\sigma[A''B''C''] = 2R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C = 16R^2 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C,$$

de unde, ținînd seama de inegalitățile $\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}$ și

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8};$$

deducem $\sigma[A''B''C''] \leqslant \sigma[ABC] \leqslant \sigma[A'B'C']$.

21. Notînd cu D punctul diametral opus lui A iar cu E proiecția lui I pe BC, demonstrăm că triunghiurile $AA''D$ și IEA' sînt asemenea.

Scanned with OKEN Scanner

22. Demonstrăm că $m(\hat{A}) = 120$; obținem $\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = \dfrac{2\cos(B-C)+1}{2\cos(B-C)-1}$ și inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\cos(B-C) \leqslant 1$. Egalitatea are loc pentru triunghiul isoscel.

23. Fie O_1, O_2, O_3 centrele a trei cercuri tangente două cîte două iar ABC triunghiul echilateral de arie maximă, care poate fi tăiat din porțiunea cuprinsă între cele trei cercuri. Observăm că raza cercului înscris în triunghiul ABC se obține scăzînd 1 dm din raza cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$. Obținem că latura este $4-2\sqrt{3} \approx 0{,}44$ dm.

24. $nR^2\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{n-2}{n}\pi\right)$.

25. $\| AB \| = 2\sqrt{3}$.

26. $M(2, 0)$.

28. Fie $c = \| AB \|$ și h_a, h_b lungimile înălțimilor corespunzătoare vîrfurilor A și B. Notînd $S = \sigma[ABC]$ rezultă $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Relația din enunț devine (1) $c = h_a + h_b$. Pe de altă parte, $h_a = c \sin B$, $h_b = c \sin A$ și înlocuind în (1) obținem $\sin A + \sin B = 1$ din care deducem $2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = 1$ și cum $\cos\dfrac{A-B}{2} \leqslant 1$ rezultă $m(\hat{C}) \leqslant 120$.

29. Facem o rotație cu centrul în C și unghi de măsură 60. Fie A' și D' imaginile lui A și D prin rotație (fig. VIII, 1).

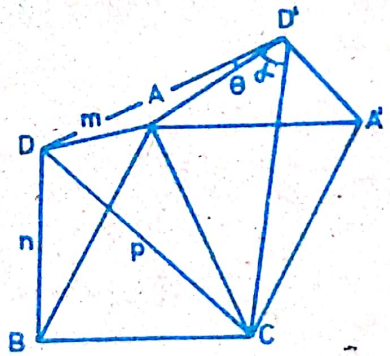


Fig. VIII, 1

Notăm $\theta = m(\widehat{AD'D})$ și $\alpha = m(\widehat{AD'C})$, $\theta + \alpha = 60$. (1) Avem $\cos\theta = \dfrac{p^2+n^2-m^2}{2np}$; $a^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos(60-\theta)$, de unde $a^2 - n^2 - p^2 = 2np\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$. Ținînd seama de (1) deducem $\dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{1}{2}m^2 - a^2 = \sqrt{3}np\sin\theta$. Ridicînd la pătrat și ținînd iarăși seama de (1) obținem relația din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

30. Considerăm $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ tangent laturilor $|AB|$ și $|AC|$. $\frac{r + r_1}{r - r_1} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$ (fig. VIII, 2) de unde obținem:

$$r_1 = \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}} \cdot r = \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{A}{4}\right) \cdot r.$$

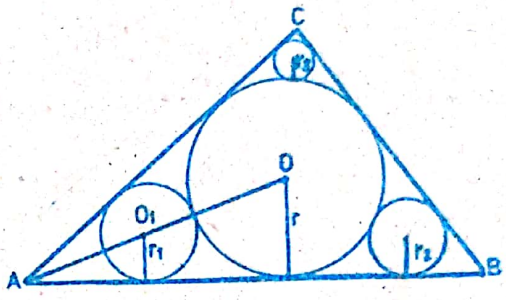


Fig. VIII, 2

Rezultă că

$$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3} = \left[\operatorname{tg}\left(45 - \frac{A}{4}\right)\operatorname{tg}\left(45 - \frac{B}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(45 - \frac{B}{4}\right)\operatorname{tg}\left(45 - \frac{C}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(45 - \frac{C}{4}\right)\operatorname{tg}\left(45 - \frac{A}{4}\right)\right] \cdot r.$$

Dar $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$ dacă $m(\hat{\alpha}) + m(\hat{\beta}) + m(\hat{\gamma}) = 180$.

În cazul nostru $90 - \frac{m(\hat{A})}{2} + 90 - \frac{m(\hat{B})}{2} + 90 - \frac{m(\hat{C})}{2} = 180$.

31. Fie $\alpha_{ij} = m(\widehat{O_i O O_j})$ și P_i punctul de tangență dintre cercurile $\mathcal{C}(O_i, r_i)$ și $\mathcal{C}(O, r)$. Folosind teorema cosinusului și teorema lui *Pitagora* avem:

$$K_{ij}^2 = (r + r_i)^2 + (r + r_j)^2 - 2(r + r_i) \cdot (r + r_j)\cos\alpha_{ij} - (r_i - r_j)^2 =$$

$$= 2r^2(1 - \cos\alpha_{ij})\left(1 + \frac{r_i}{r}\right)\left(1 + \frac{r_j}{r}\right).$$

Dar $\| P_i P_j \|^2 = 2r^2(1 - \cos\alpha_{ij})$ și deci $K_{ij} = \sqrt{\left(1 + \frac{r_i}{r}\right)\left(1 + \frac{r_j}{r}\right)} \| P_i P_j \|$.

Relația din enunț se obține aplicînd teorema lui *Ptolomeu* patrulaterului $P_1P_2P_3P_4$, adică $\| P_1P_2 \| \| P_3P_4 \| + \| P_2P_3 \| \| P_1P_4 \| = \| P_1P_3 \| \cdot \| P_2P_4 \|$ și înmulțind membru cu membru această relație cu

$$\sqrt{\left(1 + \frac{r_1}{r}\right)\left(1 + \frac{r_2}{r}\right)\left(1 + \frac{r_3}{r}\right)\left(1 + \frac{r_4}{r}\right)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

32. Avem $\sigma[ABCD] = 2 \| OB \| \| OC \| \sin \alpha$ (1). Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul BOC rezultă

$$b^2 = \| OB \|^2 + \| OC \|^2 - 2 \| OB \| \| OC \| \cos \alpha.$$

Aplicînd teorema lui *Pitagora* generalizată în paralelogramul $ABCD$ obținem

$$\| OB \|^2 + \| OC \|^2 = \frac{1}{4} (\| DB \|^2 + \| AC \|^2) = \frac{1}{2} (a^2 + b^2),$$

de unde rezultă $\sigma[ABCD] = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha$ (2). Pe de altă parte $\sigma[ABCD] = \| AB \| \| DH \|$, unde $\| DH \| = h$ este distanța de la D la AB. Din (1) și (2) avem $h = \frac{a^2 - b^2}{2a} \operatorname{tg} \alpha$. Numerele a, b, α nu pot fi luate arbitrar. Deoarece aria paralelogramului de laturi a, b este mai mică sau egală cu aria dreptunghiului de laturi a, b rezultă că $\frac{1}{2} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \alpha \leqslant ab$ sau $0 < \alpha \leqslant \operatorname{arctg} \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

33. Considerăm mai întîi două cazuri. 1) În mulțimea X există trei puncte coliniare. Presupunem că A_2 este între A_1 și A_3. Atunci $\| A_1A_2 \| \leqslant \| A_2A_3 \|$, $\| A_1A_3 \| \geqslant 2 \| A_1A_2 \|$ și deci $d \geqslant \| A_1A_3 \|$, $\delta \leqslant \| A_1A_3 \|$. Prin urmare $d \geqslant 2\delta > \delta \sqrt{3}$. 2) Trei puncte ale mulțimii X sînt vîrfurile unui triunghi, care are un unghi, de exemplu $\widehat{A_1A_2A_3}$, astfel încît $180 > \mathrm{m}(\widehat{A_1A_2A_3}) \geqslant 120$. Atunci $\cos(\widehat{A_1A_2A_3}) \leqslant -\frac{1}{2}$ și $\| A_1A_3 \|^2 = \| A_1A_2 \|^2 + \| A_2A_3 \|^2 - 2 \| A_1A_2 \| \| A_2A_3 \| \cos(\widehat{A_1A_2A_3}) \geqslant \| A_1A_2 \|^2 + \| A_2A_3 \|^2 + \| A_1A_2 \| \| A_2A_3 \|$. Ținînd seama de această ultimă inegalitate și de inegalitățile $\| A_1A_3 \| \leqslant d$, $\| A_1A_2 \| \geqslant \delta$, $\| A_2A_3 \| \geqslant \delta$ rezultă $d^2 \geqslant 3\delta^2$ sau $d \geqslant \delta \sqrt{3}$. Arătăm că dacă mulțimea X nu posedă proprietatea 1) atunci posedă proprietatea 2). Fie W un poligon convex al cărui interior conține mulțimea X, ale cărui vîrfuri pot fi și dintre punctele A_i. Poligonul W poate avea 3, 4, 5 sau 6 vîrfuri. Dacă W este triunghi, de exemplu triunghiul $A_1A_2A_3$ atunci punctul $A_4 \in \operatorname{Int} A_1A_2A_3$. Rezultă că cel puțin unul dintre unghiurile $\widehat{A_1A_4A_3}$, $\widehat{A_1A_4A_2}$, $\widehat{A_2A_4A_3}$ are măsura $\geqslant 120$, deoarece suma măsurilor celor trei unghiuri cu vîrful în A_4 este 360. Dacă W este patrulater, de exemplu patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$, sau pentagon, de exemplu pentagonul $A_1A_2A_3A_4A_5$ atunci W poate fi partiționat în triunghiuri de diagonalele sale. Atunci punctul A_6 este punct interior unuia dintre aceste triunghiuri și acest caz se reduce la cazul precedent. În sfîrșit, dacă

Scanned with OKEN Scanner

W este hexagon, atunci suma măsurilor unghiurilor sale este egală cu 720 și deci cel mai mare dintre aceste unghiuri are măsura $\geqslant 120$ și se determină un triunghi ca în cazul 2).

34. Mai întîi constatăm că măsura fiecărui unghi exterior al octogonului $A_1A_2...A_8$ este egală cu 45. Considerăm trei laturi consecutive $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|$, $|A_3A_4|$, rezultă că dreptele A_4A_3 și A_1A_2 se intersectează într-un punct N deoarece $m(\widehat{NA_2A_3}) = m(\widehat{NA_3A_2}) = 45$. Mai mult avem $A_1A_2 \perp A_4A_3$ (fig. VIII, 3). Analog $A_7A_8 \perp A_1A_2$, $A_7A_8 \perp A_5A_6$, $A_5A_6 \perp A_3A_4$. Rezultă că laturile opuse $|A_1A_2|$ și $|A_5A_6|$ ale octogonului sînt situate pe laturile opuse $|MN|$ și $|PQ|$ respectiv, ale dreptunghiului $MNPQ$, unde $\{M\} = A_1A_2 \cap A_7A_8$, $\{P\} = A_3A_4 \cap A_5A_6$, $\{Q\} = A_5A_6 \cap A_7A_8$. Arătăm că $|A_1A_2| \equiv |A_5A_6|$. Să notăm $\|A_iA_{i+1}\| = a_i$, pentru $i = 1, 2, ..., 7$ și $\|A_1A_8\| = a_8$. Avem $\|MN\| = \|MA_1\| + \|A_1A_2\| + \|A_2N\| = a_8 \cos 45 + a_1 + a_2 \cos 45$, $\|PQ\| = \|PA_5\| + \|A_5A_6\| + \|A_6Q\| = a_4 \cos 45 + a_5 + a_6 \cos 45$. Deoarece $|MN| \equiv |PQ|$ rezultă că $a_8 \cos 45 + a_1 + a_2 \cos 45 = a_4 \cos 45 + a_5 + a_6 \cos 45$ de unde obținem $a_1 - a_5 = (a_4 + a_6 - a_8 - a_2) \cos 45$ (1). Numerele $a_1 - a_5$ și $a_4 + a_6 - a_8 - a_2$ sînt raționale, iar numărul $\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este irațional. Rezultă că egalitatea (1) are loc numai dacă $a_1 = a_5$, adică $|A_1A_2| \equiv |A_5A_6|$. Rezultă că patrulaterul $A_1A_2A_5A_6$ este paralelogram, iar diagonalele $|A_1A_5|$ și $|A_2A_6|$ se intersectează în părți congruente în punctul S. Analog se arată că patrulaterele $A_2A_3A_6A_7$ și $A_3A_4A_7A_8$ sînt paralelograme, iar mijlocul S al diagonalei $|A_2A_6|$ este și mijlocul diagonalelor $|A_3A_7|$ și $|A_4A_8|$. S este centru de simetrie.

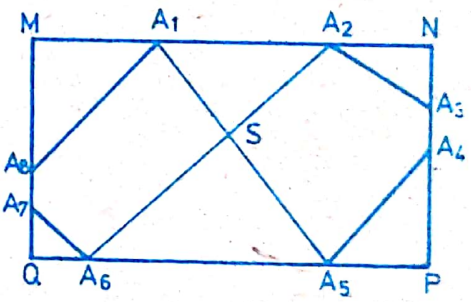


Fig. VIII, 3

Capitolul IX

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN ALGEBRĂ. NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

1. $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$,

$z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_4 = 7776\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)$,

$z_5 = 13824\,(\cos\pi + i \sin\pi)$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Notînd $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, avem $z_2 = \bar{z}_1 = r[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$ și deci $z_1^n + z_2^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + r^n[\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)] = 2r^n\cos n\alpha \in \mathbf{R}$.

4. 1) Relația $z^n \in \mathbf{R}$ este echivalentă cu $\sin n\alpha = 0$ (unde $\alpha = \arg z$) deci cu $n\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ceea ce este posibil numai cînd $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbf{Q}$. Prin urmare propoziția este falsă.

2) $\{z \in \mathbf{C} \mid z^n \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R},\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \frac{\arg z}{\pi} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\}$.

5. 2) Ecuația $z^n = 1$ are soluțiile $u_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ cu $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ iar ecuația $z^m = 1$ are soluțiile $v_p = \cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}$ cu $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Egalitatea $u_k = v_p$ implică existența unui număr întreg l astfel încît $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2p\pi}{m} + 2l\pi$ adică $km = np + lmn$. De aici rezultă $m \mid (np + lmn)$, deci $m \mid np$. Cum m și n sînt prime între ele rezultă $m \mid p$, de unde $p = 0$.

6. 1) ± 1; 2) Rădăcinile de ordinul 6 ale unității.

7. Fie $z \in A \cap B$, deci $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}$ unde k și p sînt numere naturale astfel încît $k < n$ și $p < m$.

Atunci există $l \in \mathbf{N}$, încît $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2p\pi}{m} + 2l\pi$ adică $km = pn + lmn$.

Avem $m = dm'$, $n = dn'$ cu $(m', n') = 1$, deci $km' = pn' + ldm'n'$. Prin urmare $m' \mid p$, deci $p = m'q$ și $z = \cos\frac{2q\pi}{\alpha} + i\sin\frac{2q\pi}{\alpha}$ este o rădăcină de ordinul d a unității.

Reciproc, dacă $z \in D$, atunci $z^d = 1$, deci $z^{dm'} = 1$ și $z^{dn'} = 1$, adică $z \in A \cap B$.

8. 1), 2). Alegem un sistem de axe cu originea în centrul cercului și astfel încît vîrful comun celor două poligoane să aibă afixul 1. În acest caz afixele vîrfurilor poligoanelor regulate cu m și respectiv n laturi sînt rădăcinile ecuațiilor $z^m = 1$ și respectiv $z^n = 1$. Se ține apoi cont de problemele **5** și **7**.

3) 991.

12. Cercul de rază 1 reunit cu axa reală, mai puțin originea.

13. Axa Oy.

Scanned with OKEN Scanner

14. Notînd $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, avem

$$S_1 + iS_2 = 1 + z + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha - 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1} =$$

$$= \frac{[\cos(n+1)\alpha - 1 + i\sin(n+1)\alpha][\cos\alpha - 1 - i\sin\alpha]}{2 - 2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} + i\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

de unde rezultă că $S_1 = \dfrac{\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ și $S_2 = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Celelalte sume se calculează procedînd analog.

15. 1) $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| = |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
Dacă $|z_1| = 0$ sau $|z_2| = 0$, proprietatea este demonstrată. În caz contrar, obținem $\dfrac{1}{|z_1|} + \dfrac{1}{|z_2|} \geqslant 1$; presupunînd $|z_1| > 2$ și $|z_2| > 2$ s-ar ajunge la o contradicție.

2) Notînd $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ și $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ trebuie să avem $\left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right| = 1$, adică $\left|\dfrac{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)}{r_1} + \dfrac{\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)}{r_2}\right| = 1$ adică $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} + \dfrac{2}{r_1 r_2}\cos(\alpha - \beta) = 1$. Este suficient să alegem $\cos(\alpha - \beta) = 0$ și $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} = 1$ de exemplu $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$, $\alpha = \pi$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

17. 1) Fie M_1, M_2, M_3 punctele de afix z_1, z_2, z_3 iar M_4 punctul de afix $z_4 = z_1 + z_2$. Deducem $z_4 = -z_1$, de unde rezultă că $|z_4| = |z_1| = |z_2| = |z_3|$ și triunghiurile OM_1M_4 și OM_2M_4 sînt echilaterale etc.

2) Nu rezultă. Construiți un contraexemplu!

18. 1) Afixele punctelor B, C, D, E sînt respectiv: $r[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$; $r[\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)]$; $r[\cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha)]$; $r\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

2) A, B, C, D sînt vîrfurile unui dreptunghi. Punem condiția ca dreptunghiul să fie un pătrat. Rezultă $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ cu $k \in \mathbf{Z}$ și ecuația este $z^4 = -r^4$.

19. Dacă M_1, M_2, M_3 sînt punctele de afixe z_1, z_2, z_3 atunci M_3 este mijlocul lui $|M_1M_2|$; $|z_3| = \sqrt{2}$, $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$.

20. 2) $\alpha = \frac{\beta + 1 \pm i\sqrt{3}(\beta - 1)}{2}$.

3) Dacă unul dintre numere este nul, atunci toate sînt nule și problema este rezolvată. Presupunem că toate numerele sînt nenule. Înlocuind $z_2 = \alpha z_1$, $z_3 = \beta z_1$, α și β verifică ecuația de la punctul 2). Dacă $\beta = 1$, rezultă $z_1 = z_2 = z_3$. Dacă $\beta \neq 1$ avem $\frac{\alpha - 1}{\beta - 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, deci $|\alpha - 1| = |\beta - 1|$ de unde $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$ adică $\|M_1M_2\| = \|M_1M_3\|$ unde M_1, M_2, M_3 sînt punctele de afixe z_1, z_2, z_3.

(I. Tomescu, G.M. 4/1982)

21. 1) Presupunem că există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît f_α să fie surjectivă, deci astfel încît oricare ar fi $\cos\beta + i\sin\beta \in \Gamma$ există $n \in \mathbf{N}$ încît $f_\alpha(n) = \cos\beta + i\sin\beta$ (echivalent, există $k \in \mathbf{Z}$, încît $n\alpha = \beta + 2k\pi$). În particular pentru $\beta = 0$ rezultă $2k\pi = \alpha n_0$ cu $n_0 \in \mathbf{N}$ de unde $\frac{\beta}{\alpha} = n - n_0 \in \mathbf{Z}$ oricare ar fi β real. Contradicție.

2) Notăm $\alpha = \frac{2\pi}{m}$.

3) Fie $n_1 \neq n_2$ numere naturale. Relația $f(n_1) = f(n_2)$ este echivalentă cu $\alpha(n_1 - n_2) = 2k\pi$ adică $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{k}{n_1 - n_2}$. Deducem că f_α este injectivă dacă și numai dacă $\frac{\alpha}{\pi}$ este irațional. Dacă $\frac{\alpha}{\pi}$ este rațional, f_α admite perioada m unde $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{k}{m} \in \mathbf{Q}$.

22. Fie $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ și $z_3 = \cos\gamma + i\sin\gamma$. Atunci $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și deci

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3.$$

Echivalent,

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha + \cos 3\beta + i\sin 3\beta + \cos 3\gamma + i\sin 3\gamma = 3[\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma)],$$

de unde rezultă relațiile cerute.

Scanned with OKEN Scanner

Altă soluție: Din relațiile $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ rezultă că z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral. Fie

$$\alpha = \alpha_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$\beta = \beta_1 + 2l\pi, \quad l \in \mathbf{Z};$$

$$\gamma = \gamma_1 + 2m\pi, \quad m \in \mathbf{Z},$$

cu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in [0, 2\pi)$. Presupunînd de exemplu că $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$ atunci $\beta_1 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}$ și $\gamma_1 = \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}$ deci $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = \sin 3\alpha_1 = \sin 3\alpha = \sin 3\beta = \sin 3\gamma$ etc.

23. 1) Dacă $z = |z|(\cos t + i \sin t)$ rezultă $\frac{z}{|z|} = \cos t + i \sin t$, $\frac{|z|}{z} = \cos t - i \sin t$, deci $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} = 2 \cos t \in \mathbf{R}$. Rezultă $z^2 = (2|z| \cos t) \cdot z - |z|^2$ și luăm $a = 2|z| \cos t$, $b = -|z|^2$.

2) Inducție.

(Marcel Țena, G.M. 4/1977)

Capitolul X

INCIDENȚĂ, ORDONARE, CONGRUENȚĂ ȘI PARALELISM ÎN SPAȚIU

1. Fie $\mathfrak{M}$ mulțimea ce se obține reunind toate drepte spațiului $\mathcal{S}$. Cf. I.2. orice dreaptă este o submulțime a lui $\mathcal{S}$, deci $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{S}$. Pentru incluziunea inversă, fie $A \in \mathfrak{M}$. Spațiul $\mathcal{S}$ constă din cel puțin două puncte; fie atunci $B \in \mathcal{S}$, $B \neq A$. Cf. axiomei I.4, există $d \subseteq \mathcal{S}$, o dreaptă astfel ca $\{A, B\} \subseteq d$. Deci $A \in d \subseteq \mathfrak{M}$, de unde $A \in \mathfrak{M}$, dar A este arbitrar ales, deci $\mathfrak{M} \supseteq \mathcal{S}$.

2. Fie $\mathfrak{M}$ mulțimea formată de reuniunea tuturor planelor spațiului $\mathcal{S}$. Cf. axiomei I.2 orice plan este o submulțime a lui $\mathcal{S}$, deci $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{S}$. Pentru incluziunea inversă, fie $A \in \mathcal{S}$. Spațiul $\mathcal{S}$ conține cel puțin trei puncte distincte. Fie atunci $B, C \in \mathcal{S}$, $A \neq B \neq C \neq A$. Cf. axiomei I.5, există un plan α astfel încît $\{A, B, C\} \subseteq \alpha$. Deci $A \in \alpha \subseteq \mathfrak{M}$, deci $A \in \mathfrak{M}$, deci $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{M}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Cf. axiomei I.3 există patru puncte necoplanare. Fie deci A, $B \in \mathcal{S}$, $A \notin \alpha$, $B \notin \beta$.
Distingem cazurile:

1) $A \neq B$.

Cf. I.4, există o dreaptă d cu $\{A, B\} \subseteq d$. Atunci $A \in d$ și deci $d \not\subseteq \alpha$; adăugînd că $B \in d$ rezultă $d \not\subseteq \beta$.

2) $A = B$.

Cf. I.3. orice plan conține cel puțin trei puncte (necoliniare). Fie $M \in \alpha$; atunci $A \notin \alpha$ atrage după sine $M \neq A$. Fie $d = MA$, cf. I.4. Cum $A \in d$ rezultă. $d \not\subseteq \alpha$. Dar $A = B$ implică $B \in d$, deci $d \not\subseteq \beta$.

4. Cf. I.3 există $A \notin \alpha$ și $B \notin \beta$. Să presupunem că $A \in \beta$ și $B \in \alpha$. Atunci $A \neq B$ și cf. I.4. fie dreapta AB. Conform axiomei riglei există un sistem de coordonate $f : AB \to \mathbf{R}$ astfel încît $0 = f(A) < f(B)$. Fie $\xi \in \mathbf{R} \setminus \{0, f(B)\}$. Fie $M \in AB$ astfel încît $f(M) = \xi$. Presupunerea că $M \in \alpha$ conduce la $AB \subseteq \alpha$ cf. teor. 2, § 1, Cap. IV, manual cls. X, deci $A \cup \alpha$, contradicție. Analog dacă $M \in \beta$ rezultă $B \in \beta$, contradicție.

5. Deoarece d separă C, D avem $d \cap |CD| \neq \emptyset$. Dar $d = \alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ deci $\alpha \cap |CD| \neq \emptyset$, prin urmare α separă punctele C și D.

6. Cf. I.3. există $C \in \mathcal{S}$, $C \notin \alpha$. Deoarece $d \subseteq \alpha$ rezultă că $C \notin d$. Cf. teor. 3, cap. IV, din manualul de cls. X, fie planul (dC). Avem $d \subseteq (dC)$ și (dC) separă punctele A și B conform unei probleme anterioare. Luăm $\beta = (dC)$.

7. Cum $A \neq B$, fie $d = AB$ dreapta determinată de A și B. Avem $\mathcal{S} \neq d$; în caz contrar mulțimea planelor din spațiu ar fi vidă. Atunci fie $C \in \mathcal{S} \setminus d$. Fie $\alpha = (Cd)$ planul determinat de către punctul C și dreapta d. Cf. I.3 există $M \in \mathcal{S} \setminus \alpha$. Cf. axiomei riglei în planul α există $P \in |AC|$, $Q \in |AB|$. Avem $P \nparallel Q$; altfel $AP = AQ = d$, din I.4, și ar rezulta că $C \in d$, contradicție. Din I.4. fie atunci $a = PQ$. Cf. unei teoreme din manual fie $\beta = (Ma)$ planul determinat de M și a. ($M \notin a$ deoarece $a \subseteq \alpha$ și $M \notin \alpha$, deci teorema s-a putut aplica). Se arată că $\alpha \cap \beta = a$. Cf. unor probleme anterioare planul β separă punctele A și B.

8. Fie α planul unic determinat de A și a, iar β planul unic determinat de A și b. Cum $\alpha \cap \beta \ni A$ cf. I.6. planele α și β sînt secante. Fie atunci $d = \alpha \cap \beta$. Dreapta d trece prin A și taie cel puțin una din dreptele a și b, altminteri a și b sînt coplanare; să zicem $d \cap a \neq \emptyset$. Problema nu are soluție dacă $d \cap b \neq \emptyset$.

9. Fie $A \in d$, $A \neq P$. Fie M piciorul perpendicularei coborîte din A pe α. Dreapta PM este conținută în α. Fie a unica perpendiculară (în planul α) ridicată în P pe PM. Conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $d = AP \perp a$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Fie $d \perp \alpha$; fie $M, N \in \mathcal{C}$, $A \in d$, arbitrare. Deoarece $d \perp \alpha$ rezultă că $d \perp PM$, $d \perp PN$ și deci $\triangle APM \equiv \triangle APN$ (C.C.). Rezultă că $|AM| \equiv |AN|$. Reciproc, fie $A \in d$, egal depărtat de toate punctele cercului $\mathcal{C}$. Conform unei probleme anterioare există $a \subseteq \alpha$, $P \in a$, o dreaptă cu proprietatea că $a \perp d$. Fie $M \in \mathcal{C} \cap a$. Fie b o dreaptă arbitrară din planul α ce trece prin punctul P. Fie: $N \in \mathcal{C} \cap b$. Din ipoteză $|AN| \equiv |AM|$, deci: $\triangle APM \equiv \triangle APN$ (L.L.L.). Din: $m(\widehat{APM}) = 90$, $\widehat{APM} \equiv \widehat{APN}$ rezultă că $d = AP \perp NP = b$, deci $d \perp \alpha$ (fig. X, 1).

11. Fie $\mathcal{C}$ un cerc situat în planul α, de centru P. Fie $a \subseteq \alpha$ o dreaptă și $P \in a$. Fie $M \in a \cap \mathcal{C}$. Fie $A \in d$. Fie $b \subseteq \alpha$, $P \in b$, $a \neq b$, și $N \in b \cap \mathcal{C}$. Triunghiurile APM, APN sînt congruente (L.U.L.), deci A este egal depărtat de punctele M și N, puncte arbitrare ale lui $\mathcal{C}$. Conform unei probleme anterioare, dacă există $A \in d$ egal depărtat de punctele lui $\mathcal{C}$ atunci $d \perp \alpha$. Reciproca este imediată.

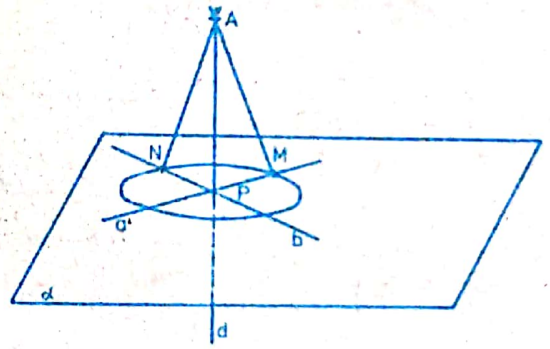


Fig. X, 1

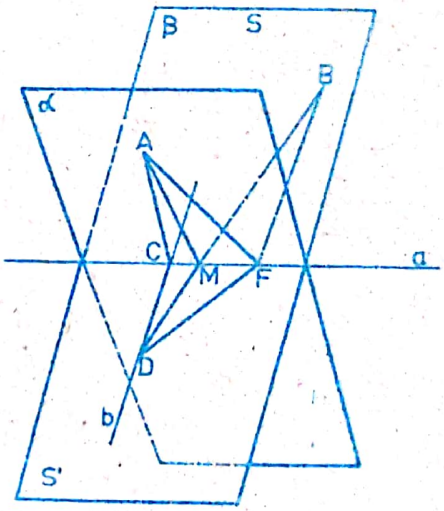


Fig. X, 2

12. Fie $M \in |CD|$, $|CM| \equiv |MD|$. Fie m planul mediator al segmentului $|CD|$, deci $M \in m$, $CD \perp m$. Fie α planul determinat de către a și D. (Evident $D \notin a$; în caz contrar CD și a ar fi coplanare). Dacă $\alpha \parallel m$ problema nu are soluție. Fie $\alpha \cap m = d$, atunci dacă $a \parallel d$ problema nu are soluție. În caz contrar fie $\{A\} = a \cap d$. Atunci $A \in d \subseteq m$ și rezultă că $|AC| \equiv |AD|$.

13. Fie α și β respectiv planele determinate de a și A, respectiv a și b. Evident $A \notin a$, $B \notin a$ (în caz contrar AB și a ar fi coplanare). Evident $\alpha \cap \beta = a$. Fie C piciorul perpendicularei coborîte din A (în planul α) pe a. Fie $b \subseteq \beta$, $b \perp a$, $C \in b$. Conform teoremei de separare a planului (aplicată în planul β) există două semiplane S și S' unic determinate de condițiile: $S \cap S' = \emptyset$, $S \cup S' = \beta \setminus a$. Pentru fixarea ideilor să presupunem că $B \in S$. (fig. X, 2). Fie $D \in b \cap S'$ astfel încît $|DC| \equiv |AC|$. Cum D, B sînt sepa-

Scanned with OKEN Scanner

rate de către a rezultă că $a \cap |DB| \neq \emptyset$. Fie $\{M\} = |DB| \cap a$. Vom arăta că M este punctul căutat. Fie $F \in a$ un alt punct. Avem $\triangle ACM \equiv \triangle DCM$, $\triangle ACF \equiv \triangle DCF$ (C.C.). De aici $|AM| \equiv |DM|$, $|AF| \equiv |DF|$. Folosind inegalitatea cunoscută între laturile triunghiului DBF (în planul β) avem: $\|AM\| + \|BM\| = \|DM\| + \|BM\| = \|BD\| < \|BF\| + \|DF\| = \|BF\| + \|AF\|$.

14. Fie $C \in \alpha$ piciorul perpendicularei coborîtă din A pe α (fig. X, 3). Fie S, S' semispațiile determinate de către planul α, adică $\mathcal{S} \setminus \alpha = S \cup S'$, $S \cap S' = \emptyset$. Fie $A \in S$, pentru fixarea ideilor. Fie $D \in AC \cap S'$ astfel încît $|AC| \equiv |CD|$. Punctele B și D sînt separate de către α, deci $|BD| \cap \alpha \neq \emptyset$. Fie $\{F\} = |BD| \cap \alpha$. Vom arăta că F este punctul căutat. Fie $G \in \alpha$ un alt punct. Din $\triangle CAF \equiv \triangle CDF$, $\triangle CAG \equiv \triangle CDG$ (C.C.) rezultă că: $|AF| \equiv |FD|$, $|AG| \equiv |GD|$. Folosind inegalitatea între lungimile laturilor triunghiului BDG vom avea: $\|AF\| + \|BF\| = \|FD\| + \|BF\| = \|BD\| < \|BG\| + \|GD\| = \|BG\| + \|AG\|$.

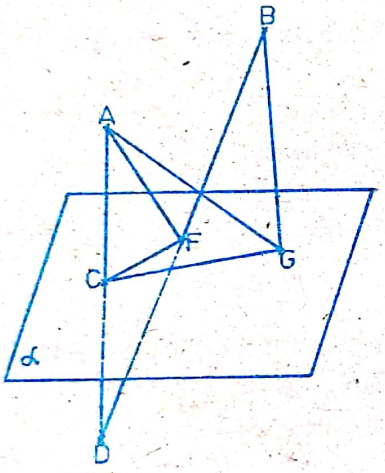


Fig. X, 3

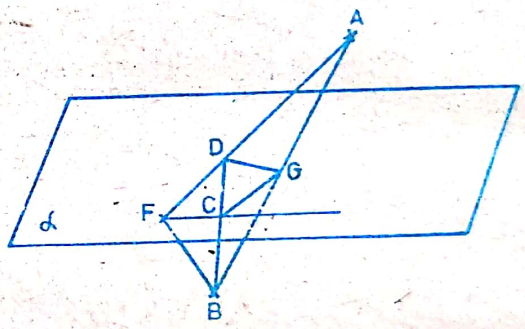


Fig. X, 4

15. Dacă A, B sînt separate de către α, clar. Dacă A, B sînt de aceeași parte a lui α, fie A', B' picioarele perpendicularelor coborîte pe α din A respectiv B. Cum $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$ rezultă $AA' \parallel BB'$. Două drepte paralele determină un unic plan β. Avem A', $B' \in \beta$ deci $A'B' \subseteq \beta$, A, $B \in \beta$ deci $AB \subseteq \beta$. Deci AB, $A'B'$ sînt coplanare. În plus $\|AA'\| = d(A, \alpha) \neq d(B, \alpha) = \|BB'\|$ deci $AB \cap A'B' \neq \emptyset$. Dar $A'B' \subseteq \alpha$, deci $AB \cap \alpha \neq \emptyset$.

16. Fie $C \in \alpha$ piciorul perpendicularei coborîtă din B pe α. Fie $D \in BC$ astfel încît: 1) punctele B, D sînt separate de planul α; 2) $|BC| \equiv |CD|$. Deoarece $d(B, \alpha) \neq d(A, \alpha)$, rezultă că $d(D, \alpha) \neq d(A, \alpha)$, deci $AD \cap \alpha \neq \emptyset$ (fig. X, 4). Fie $\{F\} = AD \cap \alpha$. Vom dovedi că F este punctul căutat. Fie $G \in \alpha$ arbitrar. Din $\triangle FDC \equiv \triangle FBC$, $\triangle DCG \equiv \triangle BCG$ (C.C.) rezultă că: $|FB| \equiv |FD|$, $|GD| \equiv |GB|$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea atunci:

$$|\,\|AF\| - \|FB\|\,| = |\,\|AF\| - \|FD\|\,| =$$
$$= \|AD\| > |\,\|AG\| - \|GD\|\,| = |\,\|AG\| - \|GB\|\,|.$$

18. Fie C piciorul perpendicularei coborîtă din B pe α. Fie $D \in CB$ astfel încît $|DC| \equiv |CB|$ și punctele B, D sînt separate de planul α. Fie m planul mediator al segmentului $|AD|$. Deoarece $d(A, \alpha) \neq d(D, \alpha)$ rezultă că $m \cap \alpha \neq \emptyset$ și fie $a = m \cap \alpha$ dreapta de intersecție. Fie $\mathcal{L}$ mulțimea din enunț. Fie $F \in a$ arbitrar. Din $\triangle CDF \equiv \triangle CBF$ și din proprietățile planului mediator avem: $|FB| \equiv |FD| \equiv |FA|$ deci $|FB| \equiv |FA|$ deci $F \in \mathcal{L}$. Rezultă $a \subseteq \mathcal{L}$. Fie $F \in \mathcal{L}$ arbitrar, deci $|AF| \equiv |FB|$. Evident $|FB| \equiv FD$. Deci $|FD| \equiv |FA|$ deci $F \in m$. Cum $F \in \alpha$ (din definiția lui $\mathcal{L}$) rezultă $F \in m \cap \alpha = a$, deci $\mathcal{L} \subseteq a$. Din dubla incluziune rezultă $\mathcal{L} = a$ (fig. X, 5).

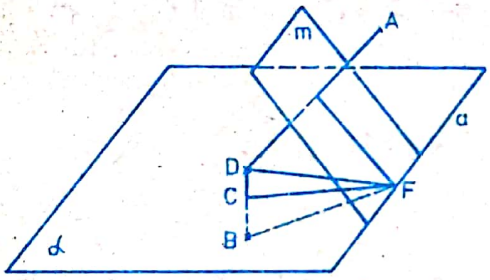


Fig. X, 5

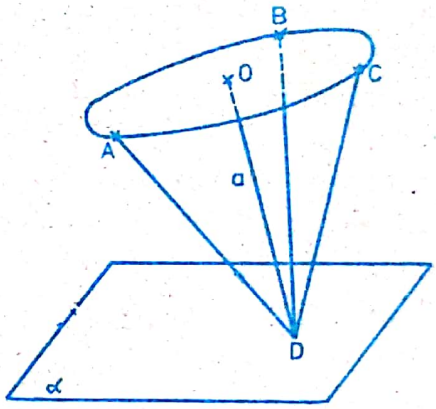


Fig. X, 6

19. Fie O centrul cercului determinat de către punctele necoliniare A, B și C. Fie a perpendiculara ridicată în O pe (ABC). Cum (ABC) nu este perpendicular pe α rezultă că $a \cap \alpha \neq \emptyset$. Fie $\{D\} = a \cap \alpha$. Punctul D este cel căutat, deoarece fiind dat un punct arbitrar fixat pe a, el este egal depărtat de toate punctele cercului de centru O, conform unei probleme anterioare (fig. X, 6).

21. Este perpendiculara ridicată în centrul O al cercului $\mathcal{C}$ pe planul α.

22. Fie D mijlocul segmentului $|AB|$. Fie $C \in \alpha$ astfel încît: $|\,\|AC\|^2 - \|BC\|^2\,| = k$, unde $k > 0$ este un număr fixat. Fie F piciorul perpendicularei din C pe AB. Conform teoremei lui *Pitagora* în triunghiurile dreptunghice BFC și CFA: $\|AC\|^2 - \|BC\|^2 = \|AF\|^2 + \|FC\|^2 - \|BF\|^2 - \|FC\|^2 = \|AF\|^2 - \|BF\|^2 = (\|AF\| - \|BF\|)(\|AF\| + \|BF\|) = \|AB\| \cdot 2 \cdot \|FD\|$. Rezultă că $\|DF\| = k/(2\|AB\|) =$ constant. Deci

toate punctele C ale locului căutat se proiectează în același punct F pe AB. Deci locul geometric este dreapta de intersecție dintre planul α și planul perpendicular pe AB în F (fig. X, 7).

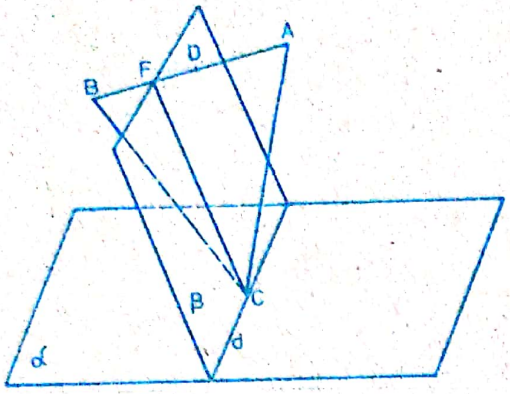


Fig. X, 7

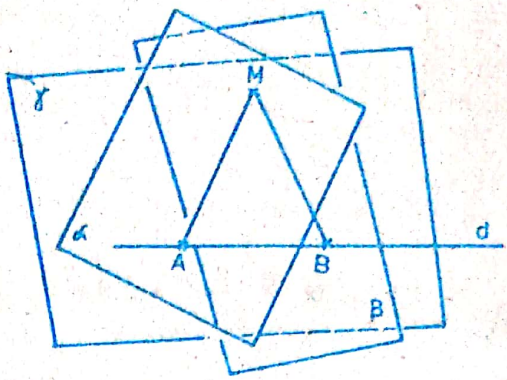


Fig. X, 8

23. Fie M un punct și d o dreaptă. Dacă $M \in d$, clar. Să presupunem că $M \notin d$. Fie α și β două plane, $M \in \alpha$, $M \in \beta$ și $\alpha \perp d$, $\beta \perp d$. Fie γ planul determinat de către M și d. Deoarece $d \perp \alpha$ și $d \perp \beta$ rezultă că $d \cap \alpha \neq \emptyset$ și $d \cap \beta \neq \emptyset$. Fie atunci $\{A\} = d \cap \alpha$, $\{B\} = d \cap \beta$ (fig. X, 8). Avem $d \perp \alpha \supseteq MA$, $d \perp \beta \supseteq MB$ și în plus $d \subseteq \gamma$, $MA \subseteq \gamma$, $MB \subseteq \gamma$, deci în planul γ avem două perpendiculare MA și MB coborîte din același punct M pe dreapta d, contradicție.

24. $\| BC \| = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{a^2 - b^2}$, $\| CD \| = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{a^2 - b^2}$.

25. Fie ABC triunghiul din enunț în care $\| AB \| = \| BC \| = a$, $\| AC \| = b$ și $A_1 B_1 C_1$ proiecția sa (fig. X, 9 și fig. X, 10). Sînt ilustrate cazurile: $B_1 = B$, respectiv $A_1 = A$. Planele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ nu coincid și sînt neparalele. În caz contrar am avea $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Considerăm cazul $a > b$. În acest caz planul pe care ABC se proiectează

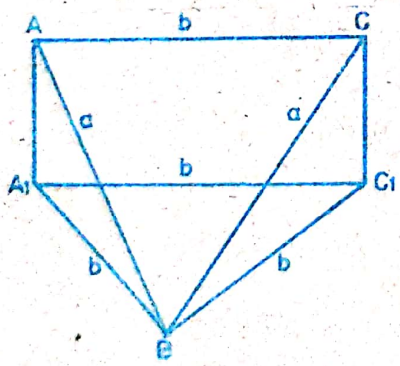


Fig. X, 9

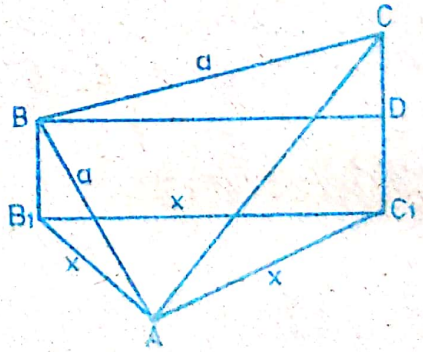


Fig. X, 10

trece prin B. Într-adevăr, dacă unul dintre vîrfurile unghiurilor congruente ale lui ABC (de exemplu A) se găsește în acest plan, din $\| BB_1 \| = m$ rezultă că $\| CC_1 \| = 2m$, deoarece numai în acest caz avem $| A_1B_1 | \equiv | B_1C_1 |$.

Scanned with OKEN Scanner

În plus: $\| A_1B_1 \| = \sqrt{a^2 - m^2}$, $\| A_1C_1 \| = \sqrt{b^2 - 4m^2}$. Deci dacă $a > b$, condiția $| A_1B_1 | \equiv | A_1C_1 |$ nu este satisfăcută. Avem $| A_1B_1 | \equiv | B_1C_1 |$ numai dacă $| A_1A | \equiv | C_1C |$, deci AC este paralelă cu planul $A_1B_1C_1$ și $\| A_1C_1 \| = \| AC \| = b$. Deci pentru $a > b$ avem $x = b$. Atunci nici una din laturile lui ABC nu poate fi paralelă cu planul $A_1B_1C_1$. În caz contrar relațiile $| A_1B_1 | \equiv | A_1C_1 | \equiv | B_1C_1 |$ nu au loc. Deci planul $A_1B_1C_1$ nu poate trece prin B (în caz contrar $AC \| (A_1B_1C_1)$). Fie $A \in A_1B_1C_1$. Atunci $\| CC_1 \| = 2 \| BB_1 \|$ adică $\sqrt{b^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$, x fiind lungimea laturii triunghiului $A_1B_1C_1$. Rezultă $x = (\sqrt{4a^2 - b^2})/\sqrt{3}$.

26. Fie $AB_1C_1D_1$ proiecția pătratului $ABCD$ pe planul P, unde $BD \| P$. Notăm $\| OO_1 \| = \| BB_1 \| = m$, $\| AB \| = \| BC \| = a$. Din triunghiurile ABB_1 și BCC_2, $(BC_2 \| B_1C_1)$, avem $\| AB_1 \| = \| BC_2 \| = \sqrt{a^2 - m^2}$. Deoarece $DB \perp AC$, avem $D_1B_1 \perp AC$ și $D_1B_1 \perp AC_1$. Deci $AB_1C_1D_1$ este paralelogram, iar diagonalele sale fiind perpendiculare, este romb (fig. X, 11).

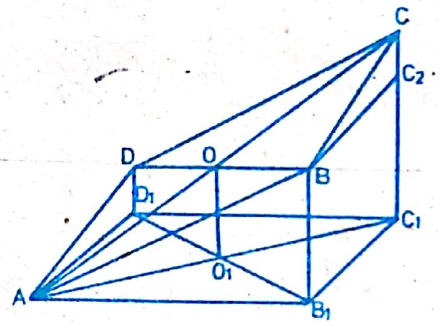


Fig. X, 11

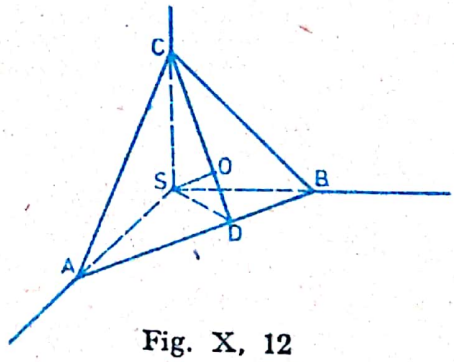


Fig. X, 12

27. Prin mijlocul M al segmentului $[AB]$ se duce planul P paralel cu dreptele a și b. Fie $\{N\} = [CD] \cap P$. Atunci $| CN | \equiv | ND |$. Considerăm acum triunghiurile AMN și BMN, ANC și BND.

28. 1) Dreapta CS este perpendiculară pe planul (ASB) (fig. X, 12) deci $AB \perp CS$. Dreapta SO este perpendiculară pe planul (ABC) deci $AB \perp SO$. Rezultă că AB este perpendiculară pe planul (CSO) deci $CO \perp AB$. Analog $AO \perp BC$ și $BO \perp AC$. 2) Să notăm $\| SA \| = a$, $\| SB \| = b$, $\| SC \| = c$ și fie $\{D\} = CO \cap AB$. Rezultă imediat $SD \perp AB$ deci $\| SD \| = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

apoi $\| CD \| = \sqrt{c^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și $\sigma[ABC] = 1/2 \| AB \| \cdot$

$\cdot \| CD \| = 1/2 \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$. Cum $\sigma[SAB] = 1/2\, ab$ și relații analoage, rezultă prima egalitate. În CSD avem $\| SD \|^2 = \| OD \| \cdot \| CD \|$ și înmulțind cu $1/4 \| AB \|^2$ obținem cea de a doua egalitate. Să observăm că dacă con-

siderăm un tetraedru dreptunghic, analogul în spațiu al unui triunghi dreptunghic, atunci relațiile obținute extind teorema lui *Pitagora* și teorema catetei.

29. Deoarece $\cos^2 x = \cos^2(180 - x)$, putem presupune $0 < x \leqslant 90$. Fie $|BC|$ latura rombului inclusă în planul π și A intersecța diagonalelor rombului. Notînd $D = \mathrm{pr}_{\pi} A$, $E = \mathrm{pr}_{BC} A$ și $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$, avem $\|AE\| = (bc)/a$, deci:

$$\frac{1}{\|AE\|^2} = \frac{a^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Înmulțind cu $\|AD\|^2$ avem:

$$\sin^2 x = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$$

de unde:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta +$$
$$+ \sin^2\alpha \sin^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta = (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta) - \sin^2\alpha \sin^2\beta =$$
$$= \cos^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta = (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) \cdot$$
$$\cdot (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta).$$

(Marcel Țena, G.M. 12/1975) (fig. X, 13)

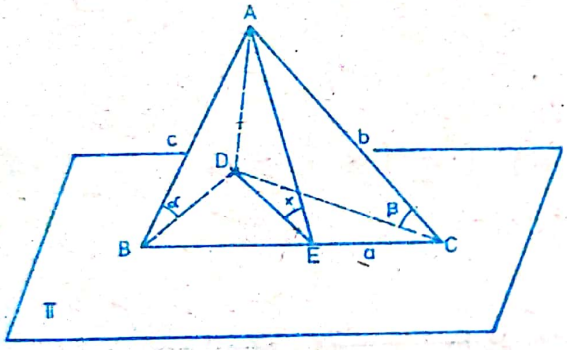


Fig. X, 13

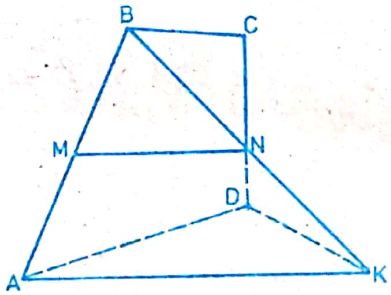


Fig. X, 14

30. Ținem seama de faptul că unghiul format de o semidreaptă cu un plan este mai mic decît unghiul format de acea semidreaptă cu orice semidreaptă din plan. Atunci:

$$\alpha < \mathrm{m}(\widehat{OAC}), \qquad \beta < \mathrm{m}(\widehat{OBC}),$$
$$\alpha < \mathrm{m}(\widehat{OAB}), \qquad \gamma < \mathrm{m}(\widehat{BCO}),$$
$$\beta < \mathrm{m}(\widehat{OBA}), \qquad \gamma < \mathrm{m}(\widehat{OCA}).$$

Însumăm aceste inegalități.

(Marcel Țena, rev. „Licăriri", Nr. 25/1978)

31. Construim dreapta care trece prin A și este paralelă cu MN. Notăm cu K intersecția ei cu BN; $[MN]$ este linie mijlocie în ABK, deci $\|AK\| = 2\|MN\|$ (fig. X, 14). Dar $\triangle BNC \equiv \triangle KND$; atunci $|DK| \equiv |BC|$. Punctul D nefiind situat pe AK urmează că:

$$\|DK\| + \|AD\| > \|AK\| = 2\|MN\|.$$

32. Fie triedrul $[\widehat{SABC}]$, O proiecția lui A pe planul (BSC), D și E proiecțiile lui O pe SB respectiv SC (fig. X, 15). Avem $AD \perp SB$, $AE \perp SC$, deci $\widehat{ADO} \equiv \widehat{AEO} \in 60°$. Observăm că $ED \perp OS$ și fie $K \in SA$ astfel încît AS este perpendiculară pe planul (DEK). Fie $\{F\} = SO \cap DE$, deci F este mijlocul lui $|ED|$.

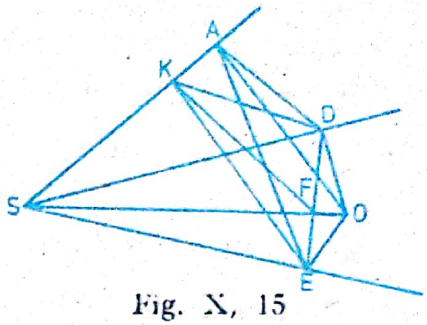


Fig. X, 15

Avem $\widehat{EKD} \in 90°$. Notăm $\|KF\| = a$, $\|OD\| = \|OE\| = b$ și din EKD rezultă $\|EF\| = \|FD\| = a$; apoi $\|OF\| = \sqrt{b^2 - a^2}$. Mai avem $\|OS\| = \frac{\|OD\|^2}{\|OF\|} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$; $\|DK\| = a\sqrt{2}$, $\|AD\| = 2b$, $\|AO\| = b\sqrt{3}$, $\|FS\| = \|OS\| - \|OF\| = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} - \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$; $\|DS\| = \sqrt{\|OS\| \cdot \|FS\|} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$; $\|AS\| = \frac{b\sqrt{4b^2 - 3a^2}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$. Din ASD și DSK avem $\|KD\| \cdot \|AS\| = \|DS\| \cdot \|AD\|$ sau $a\sqrt{2} \cdot \frac{b\sqrt{4b^2 - 3a^2}}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot 2b$, de unde obținem că $a = \frac{2b}{\sqrt{6}}$. Prin urmare $\|OS\| = b\sqrt{3}$. În AOS avem $\|AO\| = \|OS\|$, deci $\widehat{ASO} \in 45°$.

33. Fie α și β, $\alpha \perp \beta$, cele două plane pe care se proiectează triunghiul ABC. Dacă planele α și β sînt înlocuite cu planele α', β', $\alpha' \| \alpha$, $\beta' \| \beta$, atunci proiecțiile triunghiului ABC pe aceste plane nu se schimbă. Observăm că latura $[AB]$ a triunghiului ABC nu este paralelă cu nici unul dintre planele α și β. Într-adevăr, dacă $[AB] \| \alpha$ sau $[AB] \| \beta$ atunci $\|AB\| = 1$, contradicție. Putem presupune că $A \in \alpha$. Proiecțiile segmentului $[AB]$ pe planele α și β au lungimi egale, deci B este egal depărtat de planele α și β. La fel C este egal depărtat de planele α și β. Rezultă că triunghiul ABC este situat în planul bisector al unghiului diedru format de planele α și β. Astfel, planul triunghiului ABC formează cu planele α și β unghiuri diedre a căror măsură este 45. Este suficient să considerăm numai unul dintre planele α și β, deoarece orice figură geometrică situată în planul γ se proiectează la fel pe planele α și β. Fie $l = \alpha \cap \gamma$, $A \in l$ și triunghiul ABC situat în planul γ de aceeași parte a dreptei l. Observăm că latura $[AB]$ nu este perpendiculară pe dreapta l. Într-adevăr, notînd cu K proiecția lui B pe planul α, avem $BK \perp AK$ și $AB \perp l$, deci cf. teoremei celor trei perpendiculare $AK \perp l$. Prin urmare $\widehat{BAK}$ este unghi diedru și $m(\widehat{BAK}) = 45$. Din triunghiul ABK deducem $\|AK\| = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Contradicție, deoarece $\|AK\| = 1$. Fie $N \in l$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît $BN \perp l$. Raționînd ca mai sus, deducem că $m(\widehat{BNK}) = 45$. În particular, rezultă că $|KN| \equiv |BK|$. În triunghiul dreptunghic ABK avem $\|AB\| = \sqrt{5}/2$, $\|AK\| = 1$, deci $\|BK\| = 1/2$. Rezultă $\|KN\| = 1/2$. Din triunghiul dreptunghic ANK deducem $m(\widehat{NAK}) = 30$. Deoarece în planul γ triunghiul ABC este situat de aceeași parte a dreptei l, rezultă că și proiecția sa pe planul α este situată de aceeași parte a dreptei l. Fie L proiecția lui C pe planul α. Deoarece $m(\widehat{NAK}) = 30$, $m(\widehat{LAK}) = 60$, avem $L \in \text{Int}\ \widehat{NAK}$ și $LA \perp l$. Rezultă $CA \perp l$, adică $m(\widehat{CAL}) = 45$. Din triunghiul dreptunghic CLA deducem $\|AC\| = \sqrt{2}$. Observăm că dreapta BC nu este paralelă cu l, deoarece în caz contrar proiecția KL a acestei drepte pe planul α ar fi paralelă cu l, ceea ce nu este adevărat. Prin urmare există $\{M\} = l \cap BC = l \cap KL$. Segmentele $|KN|$ și $|BK|$ sînt linii mijlocii în triunghiurile AML și LMC respectiv, deoarece $\|KN\| = 1/2 = \|AL\|/2$ și $KN \| AL$. Rezultă că $\|MK\| = \|KL\| = 1$ și deci $\|BC\| = \|BM\| = \sqrt{\|BK\|^2 + \|MK\|^2} = \sqrt{5}/2$. Perimetrul lui ABC este $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (fig. X, 16).

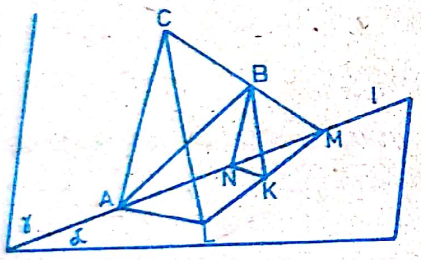


Fig. X, 16

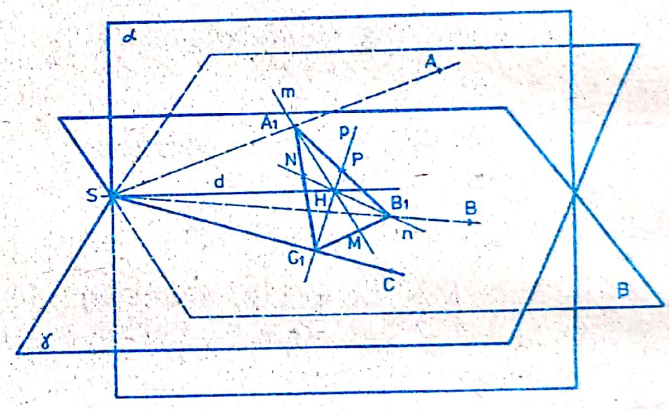


Fig. X, 17

34. Dacă cele trei semidrepte sînt coplanare, clar. Presupunem contrariul. Fie $A_1 \in |SA$ și fie π planul ce trece prin A_1, perpendicular pe dreapta SA_1. Fie $\{B_1\} = \pi \cap SB$, $\{C_1\} = \pi \cap SC$ (fig. X, 17). Fie α, β, γ planele care conțin dreptele SA, SB, SC și sînt perpendiculare pe fețele $[BSC]$, $[CSA]$, $[ASB]$ respectiv, iar m, n, p dreptele după care planele α, β, γ intersectează planul π. Deoarece $\alpha \perp \pi$ și $\alpha \perp (BSC)$, rezultă că $\alpha \perp B_1C_1$ iar dreapta m se intersectează cu B_1C_1 în punctul M și este perpendiculară pe B_1C_1, $A_1M \perp B_1C_1$. Deoarece $\beta \perp (ASC)$ și $\pi \perp (ASC)$, rezultă că $n \perp (ASC)$ și deci $n \perp A_1C_1$. Dar dreptele n și A_1C_1 sînt situate în planul π. Rezultă că aceste drepte se intersectează într-un punct N și $B_1N \perp A_1C_1$. Analog, $p \cap A_1B_1 = \{P\}$ și $p \perp A_1B_1$, deci $C_1P \perp A_1B_1$.
Astfel, dreptele A_1M, B_1N și C_1P sînt înălțimile triunghiului $A_1B_1C_1$ și deci se intersectează într-un punct H. Rezultă că planele α, β, γ se intersectează după o dreaptă $d = SH$.

Scanned with OKEN Scanner

35. Dacă $d_1 = \alpha \cap \gamma$ și $d_2 = \alpha \cap \delta$ atunci intersecția planelor γ și δ este dreapta d_3 paralelă cu d_1 și d_2, deoarece $d_1 \| d_2$. Dreptele d_1 și d_3 formează unghiuri congruente cu planul β, de măsură a, iar dreapta d_1 formează cu β un unghi de măsură a. Rezultă că și unghiul dintre d_3 și β are măsura a.

36. Presupunem că CD este conținută în fața α a diedrului iar $D \in AB$ și notăm cu β cealaltă față. Fie $CC_1 \perp \beta$, $CE \perp AB$ (fig. X, 18). Atunci unghiurile $\widehat{CDC_1}$ și $\widehat{CEC_1}$ sînt unghiurile formate de dreptele CD și respectiv CE cu α. Pe latura $[C_1D]$ a triunghiului CC_1D luăm segmentul $[C_1F]$ congruent cu $[EC_1]$ și atunci $\triangle CFC_1 \equiv \triangle CEC_1$, de unde $\widehat{CFC_1} \equiv \widehat{CEC_1}$. Dar $m(\widehat{CFC_1}) > m(\widehat{CDC_1})$ ca unghi exterior în CDF și deci $m(\widehat{CEC_1}) > m(\widehat{CDC_1})$.

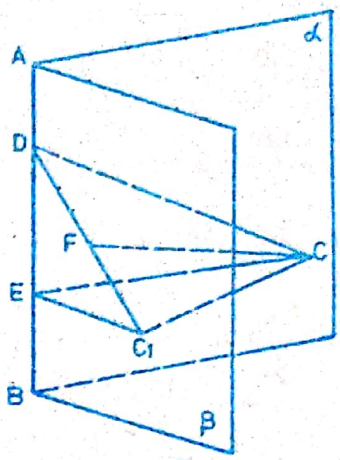


Fig. X, 18

37. Fie $DD_1 \perp ABC$ și fie dreapta CD_1C_1. Deoarece $AB \perp CD$, rezultă că $AB \perp C_1C$ (teorema celor trei perpendiculare). Analog construim dreapta BD_1B_1 și atunci $AC \perp BB_1$, de unde rezultă că a treia înălțime AA_1 trece prin D_1. Prin urmare $BC \perp AD_1A_1$ și conform teoremei celor trei perpendiculare $BC \perp AD$.

38. În hexagonul regulat $ABCDEF$ avem $AE \perp ED$. Aplicînd teorema celor trei perpendiculare rezultă că $KE \perp DE$.

39. Fie $ABCDEF$ hexagonul oarecare în care laturile $[AB]$ și $[ED]$, $[BC]$ și $[FE]$, $[CD]$ și $[AF]$ sînt congruente și paralele. Fie A', B', C', D', E', F' mijloacele laturilor: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$. Rezultă că $A'B' \| F'C' \| E'D'$ și $C'D' \| B'E' \| A'F'$. Considerînd planul $(A'B'F')$, acesta conține dreapta $F'C'$, deoarece $F'C' \| A'B'$. Rezultă că C' este conținut în planul $(A'B'F')$. Analog, dreapta $B'E'$ este conținută în planul $(A'B'F')$ și deci și punctul E' este conținut. Rezultă că planul $(A'B'F')$ conține dreptele $E'D'$, $C'D'$, deoarece ele au cîte un punct în planul $(A'B'F')$ și sînt paralele cu drepte situate în acest plan.

40. Presupunem că distanțele de la vîrfurile triunghiului ABC la planul α sînt $\| AA_1 \| = a$, $\| BB_1 \| = b$, $\| CC_1 \| = c$; construim mediana $[BM]$ și proiecția sa pe planul α (fig. X, 19). Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, G_1 proiecția sa pe α. În trapezul ACC_1A_1, $[MM_1]$ este linie mijlocie, deci $\| MM_1 \| = \dfrac{a+c}{2}$. În trapezul M_1MBB_1

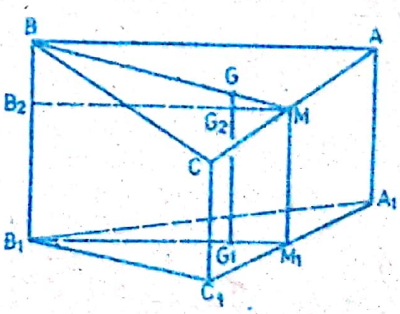


Fig. X, 19

ducem $MB_2 \parallel M_1B_1$ (tratăm cazul $B_2 \in |BB_1|$) $\|BB_2\| = b - \frac{a+c}{2}$.

Dacă $\{G_2\} = GG_1 \cap MB_2$, avem $\triangle MGG_2 \sim \triangle MBB_2 \Rightarrow \frac{\|GG_2\|}{\|BB_2\|} = \frac{\|MG\|}{\|MB\|} = 1/3$. Deci: $\|GG_2\| = \frac{\|BB_2\|}{3} = \frac{2b-a-c}{6}$. În final, avem $\|GG_1\| = \|G_1G_2\| + \|G_2G\| = \frac{a+c}{2} + \frac{2b-a-c}{6} = \frac{a+b+c}{3}$.

41. Din egalitatea $\frac{\|AA'\|}{\|A'B\|} = \frac{\|CB'\|}{\|B'B\|}$ rezultă că dreptele $A'B'$ și AC sînt paralele. Analog, dreptele $D'C'$ și AC sînt paralele și rezultă astfel că $A'B' \parallel D'C'$. Analog, se arată că $B'C' \parallel A'D'$ și deci $A'B'C'D'$ este paralelogram.

42. Presupunem că dreptele d_1 și d_2 sînt conținute în planul β. Rezultă că planele α și β coincid deoarece conțin fiecare dreapta d_1 și punctul de intersecție al dreptei d_2 cu planul α. Atunci dreapta d_2 s-ar afla în planul α, ceea ce contrazice ipoteza.

43. Notăm $\|AA'\| = a$, $\|BB'\| = b$, $\|CC'\| = c$, $c < a$, $c < b$ și considerăm medianele $[CD]$ și $[C'D']$ în triunghiurile ABC respectiv $A'B'C'$. Atunci în trapezul $ABB'A'$, $[DD']$ este linie mijlocie și deci $\|DD'\| = (a+b)/2$. Fie G și G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Construim în trapezul $CDD'C'$ o paralelă $C'E$ la CD și atunci: $\|FG'\| = \frac{2\|ED'\|}{3} = 2/3\left(\frac{a+b}{2} - c\right) = \frac{a+b-2c}{2}$. Rezultă că $\|GG'\| = \|GF\| + \|FG'\| = c + \frac{a+b-2c}{3}$, adică distanța de la G' la G este constantă. Planele $(A'B'C')$ trec prin punctul fix G' (fig. X, 20).

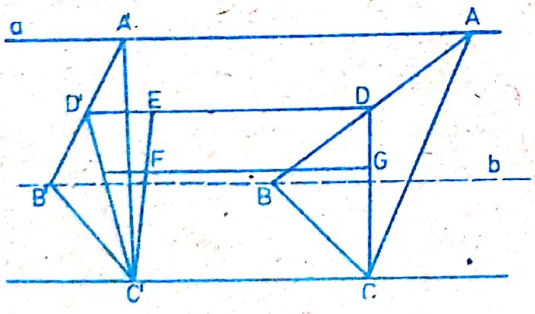


Fig. X, 20

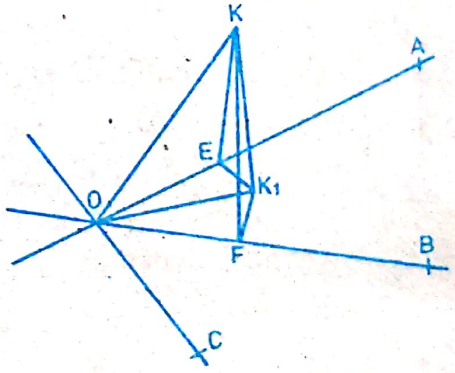


Fig. X, 21

44. Presupunem că dreapta KO formează unghiuri congruente cu dreptele OA, OB și OC situate în planul α (fig. X, 21). Fie K_1 proiecția punctului K pe planul α, iar E și F proiecțiile lui K_1 pe OA respectiv OB. Avem $KE \perp OA$ și $KF \perp OB$. Avem $\triangle OKF \equiv \triangle OKE$. Atunci $|KE| \equiv |KF|$, deci și pro-

Scanned with OKEN Scanner

iecțiile lor sînt congruente. Deci $|OK_1$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$. Analog se arată că punctul K se proiectează în planul α pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COA}$, adică în punctul comun bisectoarelor unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, adică punctul O, deci $K\dot{O} \perp \alpha$.

45. Fie A', B' respectiv proiecțiile punctelor A, B pe planul α. Fie $P \in \alpha$ astfel încît $\| PA \|^2 + \| PB \|^2 = k$, $k > 0$. Triunghiurile $AA'P$, $BB'P$ sînt dreptunghice, deci: $\| AP \|^2 = \| AA' \|^2 + \| PA' \|^2$, $\| PB \|^2 = \| BB' \|^2 + + \| PB' \|^2$, de unde: $\| PA' \|^2 + \| PB' \|^2 = k'$, unde $k' = k - \| AA' \|^2 - - \| BB' \|^2$, $k' > 0$. Reciproc, analog.

46. Fie B proiecția lui A pe α. Din definiția perpendicularității pe un plan, $AB \perp BC$ deci B este un punct al locului. Fie a o dreaptă oarecare trecînd prin punctul C, inclusă în α. Fie D piciorul perpendicularei coborîtă din B pe a. Urmează că D este un punct al locului. Cum $|BC|$ este un segment fix și $\widehat{BDC} \in 90°$ un unghi de măsură constantă, urmează că locul geometric este un cerc de diametru $|BC|$, situat în planul α.

49. Fie a', b' respectiv două drepte astfel încît:

$$A \in a',\ A \in b',\ a \parallel a',\ b \parallel b',$$

unice conform axiomei lui *Euclid*. (Respectiv aplicată în planele (A, a) și (A, b)). Fie α planul determinat de dreptele concurente a' și b'. Vom arăta că α este planul căutat. Să arătăm de exemplu că $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Să presupunem contrariul. Dar $b \parallel b'$, $b' \subseteq \alpha$, atrage după sine sau $b \parallel \alpha$ sau $b \subseteq \alpha$. Deci $b \subseteq \alpha$. Conform ipotezei $b \cap a' = \emptyset$; cum $a' \subseteq \alpha$ rezultă $b \parallel a'$. Dar $a' \parallel a$ deci $b \parallel a$, deci a și b sînt coplanare, contradicție. Analog se arată că $\alpha \cap a = \emptyset$.

50. $AG \perp \alpha$ și $CF \perp \alpha$ dau $AG \parallel CF$. Deci AG și CF determină un plan; fie el β. Cum $A, C \in \beta$ rezultă că $AC \subseteq \beta$. Fie O mijlocul diagonalei $|AC|$; avem $G, F \in \beta$ deci $GF \subseteq \beta$; $G, F \in \alpha$ deci $GF \subseteq \alpha$; $A \in \beta$ și $A \notin \alpha$ deci $\alpha \neq \beta$. Urmează că $GF = \alpha \cap \beta$. Punctele G, O, F sînt coliniare; într-adevăr $O \in AC$ deci $O \in \beta$, $O \in BD$ deci $O \in \alpha$. Deci $O \in \alpha \cap \beta = GE$, deci $O \in GE$. Faptul investigat rezultă acum din congruența triunghiurilor dreptunghice AOG, COF. A fost necesar să demonstrăm coliniaritatea punctelor G, O și F pentru a putea aplica în planul β teorema privind congruența unghiurilor opuse la vîrf.

51. Fie $B \in a$ fixat, astfel încît $B \notin d$. Există un asemenea punct deoarece $a \neq d$. Conform axiomei lui *Euclid* în planul determinat de punctul B și dreapta d există și este unică paralela d' prin B la d. Fie α planul determinat de către dreptele concurente a și b. Dacă $b \parallel \alpha$ problema nu are soluție. Fie $\{G\} = b \cap \alpha$. Fie d'' o paralelă prin G la d', unică conform axiomei lui *Euclid* aplicată în planul α. Dreapta d'' satisface condițiile din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

52. Fie α, β două plane secante. Fie $A \in \alpha \setminus \beta$, $C \in \beta \setminus \alpha$ și $B, D \in \alpha \cap \beta$, $B \neq D$. Evident $ABCD$ este un patrulater strîmb. Fie E, F, G, H respectiv mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ și $|DA|$. Aplicînd proprietățile liniei mijlocii în triunghiurile ABD și BCD rezultă că $EFGH$ este paralelogram.

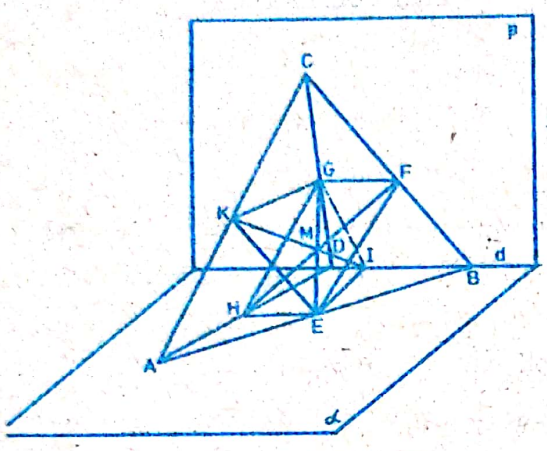


Fig. X, 22

53. Fie α, β două plane secante și $\alpha \cap \beta = d$ (fig. X, 22). Fie $A \in \alpha \setminus \beta$, $C \in \beta \setminus \alpha$, $B, D \in d$, $B \neq D$. Fie E, F, G, H respectiv mijloacele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ și $|DA|$. Fie M punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $EFGH$. Fie K și I respectiv mijloacele diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$. Patrulaterul $EGKI$ este paralelogram deoarece $|KE|$ și $|GI|$ sînt linii mijlocii respectiv în ABC și BCD. Deci diagonala $|KI|$ trece prin mijlocul M al diagonalei $|GE|$.

54. $\| AB \| = \dfrac{bc}{a+b}$, $\| BC \| = \dfrac{ac}{a+b}$.

55. Fie C mijlocul segmentului $|DF|$. Cum $C \notin d$, fie α planul determinat de C și d. Este planul căutat.

57. Fie α un plan oarecare ce trece prin d. Fie C piciorul perpendicularei coborîtă din O pe α. Fie D piciorul perpendicularei coborîtă din C pe d. Conform teoremei celor 3 perpendiculare $OD \perp d$. Fie β planul determinat de către dreptele concurente OD și CD. Dreapta d este perpendiculară pe două drepte distincte neparalele conținute în β deci $d \perp \beta$. Deci picioarele perpendicularelor coborîte din O pe planele ce trec prin d sînt conținute în unicul plan ce trece prin O și este perpendicular pe d.

58. Fie α planul determinat de punctele A, B și C. (Punctele A, B, C sînt necoliniare; în caz contrar A, B, C, D ar fi coplanare.) Atunci $D \notin \alpha$. Locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele A, B, C este perpendiculara ridicată în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC pe planul α. Planul mediator m al segmentului $|AD|$ nu este perpendicular pe α, (în caz contrar ar rezulta că $D \in \alpha$), deci $m \cap d \neq \emptyset$. Punctul $\{H\} = m \cap d$ este cel căutat.

61. Fie $a = \gamma \cap \beta$. (Planele γ și β sînt secante deoarece $O \in \gamma \cap \beta$). Avem $\beta \perp b$, $b \parallel \alpha$ de unde $\beta \perp \alpha$. Avem $\gamma \perp c$, $c \parallel \alpha$ de unde $\gamma \perp \alpha$. Intersecția lor a este deci de asemenea perpendiculară pe α.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XI

POLIEDRE

1. Evident poligonul nu poate avea laturi mai multe decît fețele cubului. Printre toate secțiunile posibile, cu mai mult de trei laturi, există un poligon în care cel puțin două laturi sînt paralele, deoarece fețele opuse ale cubului sînt paralele. Rezultă că printre secțiuni nu există un pentagon regulat.

2. Vom construi perpendiculara comună a dreptelor BD_1 și CB_1 (fig. XI, 1). Deoarece $CB_1 \perp BC_1$ și $CB_1 \perp AB$ rezultă că $CB_1 \perp (ABC_1)$. Segmentul $|MN|$ este înălțime în triunghiul dreptunghic BMO, unde $MO \parallel AB$. Avem $\frac{\| BN \|}{\| NO \|} = \frac{\| BM \|^2}{\| MO \|^2} = 2$, deci $\| BN \| = 2/3 \| BO \| = 1/3 \| BD_1 \|$. Găsim $\| MN \| = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$.

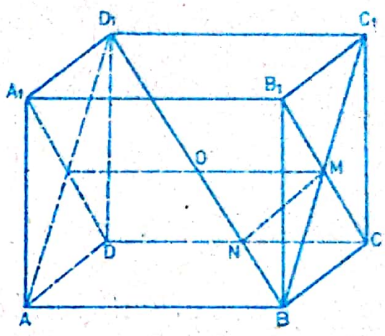
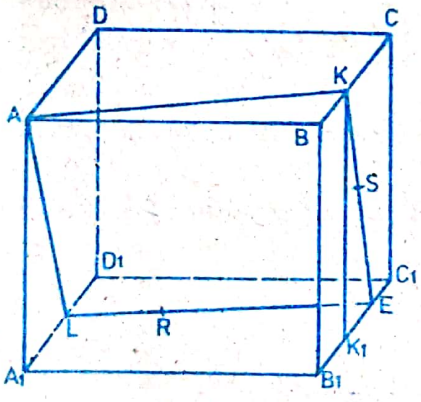
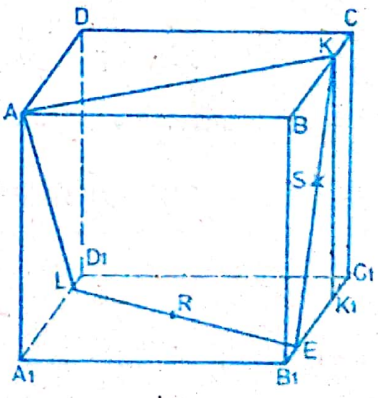


Fig. XI, 1

3. Fie R și S centrele fețelor $A_1B_1C_1D_1$ și B_1C_1CB. Planul (RES) nu trece prin mijlocul muchiei $|B_1C_1|$. Într-adevăr, în caz contrar, (RES) ar fi paralel cu fața $[ABB_1A_1]$ și nu ar trece prin A. Deci E este fie mai aproape de C_1 fie mai aproape de B_1 (fig. XI, 2a, XI, 2b). Facem simultan raționamente valabile în ambele situații; soluția obținută arată care dintre situații este posibilă. Notăm $l = (ARS) \cap (A_1B_1C_1D_1)$. Dreapta l nu poate fi



a



b

Fig. XI, 2

paralelă cu dreapta A_1D_1 căci în caz contrar planul (ARS) nu ar intersecta fața $[B_1C_1CB]$ și nu ar trece astfel prin S. Rezultă că dreapta l intersectează dreapta A_1D_1, ceea ce înseamnă că planul (ARS) intersectează dreapta A_1D_1 și deci și dreptele BC și B_1C_1 care sînt paralele cu A_1D_1. Notăm $\{L\} = (ARS) \cap A_1D_1$, $\{E\} = B_1C_1 \cap (ARS)$, $\{K\} = BC \cap (ARS)$. Patrulaterul $ALEK$ are vîrfurile situate în planul (ARS) și avem $AL \parallel KE$, $AK \parallel LE$,

Scanned with OKEN Scanner

fiind dreptele de intersecție a două plane paralele cu un al treilea plan. Rezultă că patrulaterul $ALEK$ este paralelogram. În patratul B_1C_1CD fie $KK_1 \perp B_1C_1$. Deoarece $\triangle K_1KE = \triangle A_1AL$, rezultă că $|K_1E| = |A_1L|$. Deoarece R și S sînt centrele fețelor, $|EC_1| = |BK|$, $|EC_1| = |A_1L|$. Evident $|BK| = |B_1K_1|$. Rezultă că $|B_1K_1| = |K_1E| = |EC_1|$.

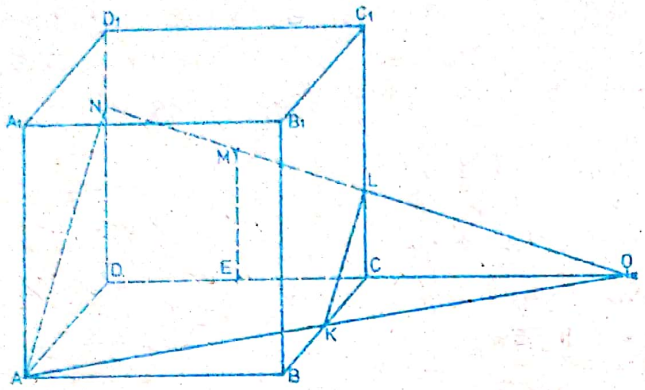


Fig. XI, 3

4. Deoarece punctele A și K sînt situate în planul $(ABCD)$, dreapta AK intersectează dreapta CD într-un punct O. $\triangle ABK = \triangle KCO$, deci $|CO| = |AB| = |CD|$, adică $\|DO\| = 2\|DC\|$. Punctele M și O sînt situate în planul (DCC_1D_1), deci MO intersectează muchiile $|CC_1|$ și $|DD_1|$ în puncte notate cu L și N. Secțiunea în cub este patrulaterul $AKLN$ (fig. XI, 3). Fie E proiecția lui M pe CD. Punctul E este mijlocul lui $|CD|$. Triunghiurile OCL, OEM, ODN sînt asemenea, deci $\|CL\| = 2/3\|ME\|$, $\|DN\| = 4/3\|ME\|$. Ținem seama că $\|ME\| = 1/2\|CC_1\| = 1/2\|DD_1\|$ și deducem $\|DN\| = 2/3\|DD_1\|$, $\|CL\| = 1/3\|CC_1\|$. Volumul poliedrului $[ADCKNL]$ este diferența volumelor piramidelor $[NADO]$ și $[LKCO]$. Raportul este 7/29.

5. Fie $(ABCD)$ un plan diagonal al cubului, O centrul lui $ABCD$, iar MN dreapta de rotație, perpendiculară pe $(ABCD)$ în O (fig. XI, 4a). Fie $[A'B'C'D'F'K']$ prisma obținută după rotire din $[ABCDFK]$. Intersecția fețelor $[ABCD]$ și $[A'B'C'D']$ este un pătrat de latură a, deoarece $\|AB\| = a$ (fig. XI, 4b). Atunci $\|BC\| = a\sqrt{2}$ și deci $\|RD\| = \dfrac{a\sqrt{2}-a}{2}$. Partea comună a celor două prisme este un paralelipiped cu baza un pătrat de latură a și înălțime $\|KP\| = \dfrac{a\sqrt{2}-a}{2}$ și o piramidă patrulateră

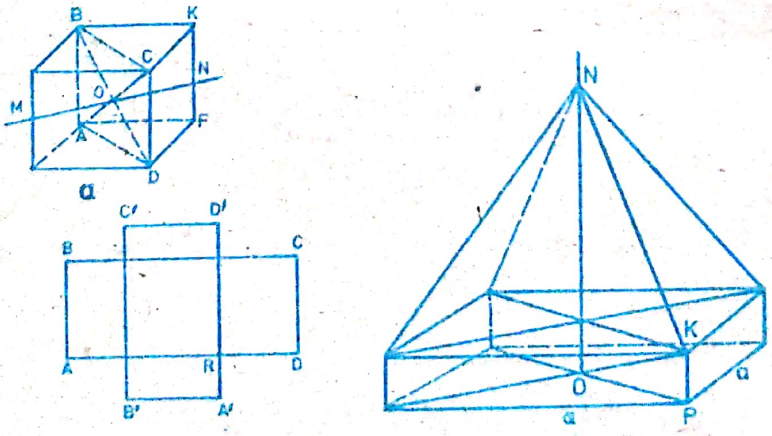


Fig. XI, 4

regulată cu baza un pătrat de latură a și înălțimea de lungime $\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}-a}{2}$ (fig. XI, 4c). Volumul total este $\frac{a^3}{6}(3\sqrt{2}-2)$.

6. Fie V volumul piramidei $[ABCD]$. Atunci:

$$V = \frac{1}{3}(S_A \| MA' \| + S_B \| MB' \| + S_C \| MC' \|) + \frac{1}{3}(S_D \| MD' \|)$$

și:

$$V = \frac{1}{3} h_A S_A = \frac{1}{3} h_B S_B = \frac{1}{3} h_C S_C = \frac{1}{3} h_D S_D.$$

Dar:

$$h_A \leqslant \| MA \| + \| MA' \|, \; h_B \leqslant \| BM \| + \| MB' \|,$$
$$h_C \leqslant \| MC \| + \| MC' \|, \; h_D \leqslant \| MD \| + \| MD' \|.$$

Combinînd aceste relații, rezultă inegalitatea cerută.

7. $\frac{\| AE \|}{\| AB \|} = \frac{\| AF \|}{\| AC \|} = 1/3$ și deci $\sigma[AEF] = 1/9\,\sigma[ABC]$. Fie M și N proiecțiile lui K și S pe planul (ABC). Avem $\frac{\| KM \|}{\| SN \|} = \frac{\| AK \|}{\| AS \|} = 2/3$, deci $\| KM \| = 2/3 \; \| SN \|$.

8. Cazul 1). Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au laturile paralele. Patrulaterul $AB'A'B$ este paralelogram, deci diagonalele $|AA'|$ și $|BB'|$ se taie în părți congruente în K. Analog se arată că $|CC'|$ și $|AA'|$ se taie în părți congruente, deci dreapta CC' trece prin K. Deci AA', BB', CC' se intersectează în punctul K. Prin K trec planele mediatoare ale segmentelor $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$. Punctul S aparține planelor mediatoare. Planele mediatoare se intersectează deci după KS (fig. XI, 5a).

Cazul 2). Laturile triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ nu sînt paralele. Atunci $|AA'|, |BB'|, |CC'|$ nu au nici un punct comun. Fie K, L, M mijloacele lor. Se observă că S este situat în planele mediatoare ale segmentelor $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ (fig. XI, 5b).

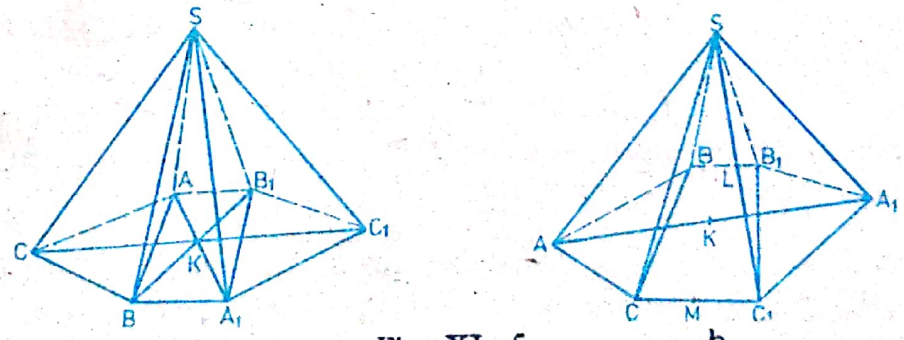


Fig. XI, 5

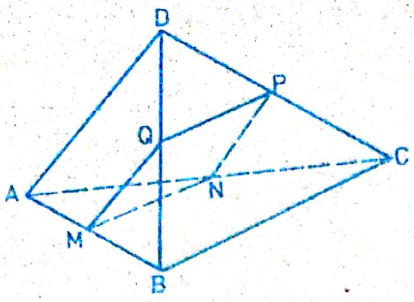


Fig. XI, 6

9. Dacă secțiunea tetraedrului cu planul este un paralelogram atunci planul nu trece prin nici un vîrf al tetraedrului, deoarece în caz contrar secțiunea ar fi un triunghi, un segment sau un punct. Laturile secțiunii sînt conținute în fețe distincte, iar vîrfurile sînt puncte interioare muchiilor tetraedrului. Fie $[ABCD]$ tetraedrul iar $MNPQ$ paralelogramul după care este secționat tetraedrul, astfel încît $M \in |AB|$, $N \in |AC|$, $P \in |CD|$, $Q \in |BD|$ (fig. XI, 6). Deoarece $MN \parallel PQ$ dreapta PQ este paralelă cu planul (ABC) care conține dreapta MN. Rezultă că PQ este paralelă cu BC, care este dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (BCD) și deci $MN \parallel BC$. Analog, $MQ \parallel AD$, $NP \parallel AD$. Din asemănarea triunghiurilor AMN, ABC și BMQ, BAD avem: $\frac{\|MN\|}{\|BC\|} = \frac{\|AM\|}{\|AB\|}$ și $\frac{\|MQ\|}{\|AD\|} = \frac{\|MB\|}{\|AB\|}$, de unde rezultă că $\frac{\|MN\|}{\|BC\|} + \frac{\|MQ\|}{\|AD\|} = 1$.

11. Rezultă mai întîi că avem $\frac{V_1}{V} = \frac{\|A_3M\|^3}{\|A_3A_4\|^3}$ și $\frac{V_2}{V} = \frac{\|MA_4\|^3}{\|A_3A_4\|^3}$, deoarece planele π_1 și $A_1A_2A_3$ respectiv π_2 și $A_1'A_2A_3$ sînt paralele. Să observăm că pentru orice două numere reale pozitive a și b avem $4(a^3 + b^3) \geqslant (a + b)^3$, cu egalitate pentru $a = b$. Rezultă $4(V_1 + V_2) \geqslant 4$. Pe de altă parte $2(V_1^2 + V_2^2) \geqslant (V_1 + V_2)^2$, deci $32(V_1^2 + V_2^2) \geqslant V^2$. Deci valoarea minimă a lui $V_1^2 + V_2^2$ este $V^2/32$. Minimul este atins cînd M este mijlocul muchiei $|A_3A_4|$. Cînd M descrie $[A_3A_4]$, O_1 și O_2 descriu segmentele $[A_3O]$, respectiv $[A_4O]$.

(Fl. Pîrvănescu, G.M. 8/1979)

12. Fie K, L, M, N, P, Q mijloacele muchiilor tetraedrului $[ABCD]$. Trebuie arătat că oricare dintre dreptele KL, MN, PQ este axă de simetrie a tetraedrului și este perpendiculară pe fiecare dintre celelalte două drepte. Din $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$ rezultă că medianele $|DK|$, $|CK|$ sînt congruente. Prin urmare, triunghiul DKC este isoscel și atunci mediana sa $|KL|$ este și înălțime, deci $KL \perp DC$. Analog $KL \perp AB$. Deoarece B este simetricul lui A în raport cu KL, iar C este simetricul lui D în raport cu KL, rezultă că LK este axă de simetrie a tetraedrului. Segmentul $|BC|$ este simetricul lui $|AD|$ și deci mijlocul Q al segmentului $|BC|$ este simetricul mijlocului P al lui $|AD|$. Dreapta PQ trece prin punctele P și Q simetrice în raport cu KL și o intersectează, prin urmare $PQ \perp KL$.

13. Fie B_1 și B_2 picioarele înălțimilor din A_1, respectiv A_2. Observăm că: (1) $\sigma[A_2A_3A_4] \cdot \|A_1B_1\| + \sigma[A_1A_3A_4] \cdot \|A_2B_2\| = 6V$, unde V este volumul tetraedrului dat. Notînd cu P și Q proiecțiile lui M pe planele $(A_1A_3A_4)$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv $(A_2A_3A_4)$, avem $\| M_1B_1 \| = \| MQ \|$ și $\| M_2B_2 \| = \| MP \|$; rezultă din (1) că $\sigma[A_2A_3A_4] \cdot \| A_1M_1 \| + \sigma[A_1A_3A_4] \cdot \| A_2M_2 \| + \sigma[A_2A_3A_4] \cdot \| MQ \| + \sigma[A_1A_3A_4] \cdot \| MP \| = 6V$, ș.a.m.d.

(Fl. Pîrvănescu, G.M. 9/1981)

14. Din triunghiul $A_1A_3A_4$ rezultă că: $\| A_3A_4 \| = 1/2\ a(\sqrt{5}-1)\sqrt{2}$. Din triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $A_1A_2A_4$ deducem

$$\| A_2A_3 \| = \| A_2A_4 \| = 1/2\ a\,(\sqrt{5}-1)\ \sqrt{2} = \| A_3A_4 \|.$$

15. Se consideră o rotație a triunghiului ABD în jurul lui AB astfel încît imaginea D' a lui D să fie un punct în planul (ABC) și AB să separe punctele D și D'. Aplicînd inegalitatea lui *Ptolomeu* pentru patrulatere oarecare, rezultă $\| BC \| \cdot \| AD \| + \| AC \| \cdot \| BD \| \geqslant \| AB \| \cdot \| CD' \|$ și cum $\| CD' \| > \| CD \|$ rezultă $am + nb > cp$. La fel se verifică $am + cp > bn$ și $bn + cp > am$.

16. Se aplică convenabil teorema lui *D. Pompei*: „fiind dat un triunghi echilateral ABC și un punct I situat în planul său, cu segmentele $|IA|$, $|IB|$, $|IC|$ se poate construi un triunghi."

17. Fie $[ABCD]$ un tetraedru, $S_0 = \sigma[ABC]$, O proiecția lui D pe planul (ABC), A', B', C' proiecțiile lui D pe BC, AC, AB. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $OC' \perp AB$, $OA' \perp BC$, $OB' \perp AC$. Din ipoteză $\widehat{DA'O} \equiv \widehat{DB'O} \equiv \widehat{DC'O}$. Prin urmare $\triangle DOC' \equiv \triangle DOB' \equiv \triangle DOA'$. Fie $H = \| DO \|$, $\| DA' \| = \| DB' \| = \| DC' \| = h$, $\| OA' \| = \| OB' \| = \| OC' \| = r$, $S = S_1 + S_2 + S_3$. Avem $V = 1/3\, S_0 \cdot H$ (1), iar din triunghiul dreptunghic DOC' deducem $H = \sqrt{h^2 - r^2}$ (2). Știm că $S_3 = 1/2 \| AB \| \cdot h$, deci $\| AB \| = \dfrac{2S_3}{h}$. Analog $\| BC \| = 2S_1/h$, $\| AC \| = 2S_2/h$. Semiperimetrul p al triunghiului ABC este dat de:

$$p = S_3/h + S_1/h + S_2/h = S/h \quad \text{iar} \quad p - \| AB \| = S/h - 2S_3/h.$$

Analog $p - \| BC \| = (S - 2S_1)/h$, $p - \| AC \| = (S - 2S_2)/h$.
Din formula lui *Heron*, deducem:

$$h = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \sqrt[4]{S(S-2S_1)\,(S-2S_2)\,(S-2S_3)} \quad (3).$$

Știm că:

$$S_0 = pr = \frac{S}{h} r, \text{ deci } r = h\,\frac{S_0}{S}.$$

Înlocuind în (2) avem:

$$H = \frac{h}{S} \sqrt{S^2 - S_0^2} \quad (4).$$ Eliminăm h și H între relațiile (1), (3) și (4).

Scanned with OKEN Scanner

18. Considerăm cubul $[ABCDA'B'C'D']$ a cărui muchie are lungimea a și presupunem că tetraedrul $[T]$ este tetraedrul $[A'BDC']$. Mijloacele muchiilor opuse $[A'B]$ și $[C'D]$ sînt respectiv centrele fețelor $[A'B'BA]$ și $[C'CDD']$, fie acestea M și P. Rotim cu un unghi de măsură 90 tetraedrul $[A'BDC']$ și obținem tetraedrul $[B'ACD']$. Observăm că $[T] \cap [T']$ este un octaedru, și anume $[MNPQRS]$. Avem $\|RM\| = 1/2\,\|BD\| = 1/2\,a\sqrt{2}$, $|RN| = |RP| = |RQ| = |MQ| = |MN| = |NP| = |PQ| = |SM| = |SN| = |SP| = |SQ|$. Avem $\|OR\|^2 = (a/2)^2$ (fig. XI, 7).

19. Fie H piciorul înălțimii tetraedrului regulat $[ABCD]$ corespunzătoare vîrfului D, iar M, N, P punctele de intersecție ale unui plan ce trece prin dreapta HD cu dreptele BC, AC și AB respectiv. Măsurile α, β, γ ale unghiurilor formate de semidreptele $|MD$, $|ND$, $|PD$ cu proiecțiile lor $|MH$, $|NH$, $|PH$ pe planul (ABC) satisfac relațiile:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\|HD\|}{\|MH\|},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{\|HD\|}{\|NH\|},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\|HD\|}{\|PH\|} \quad (1).$$

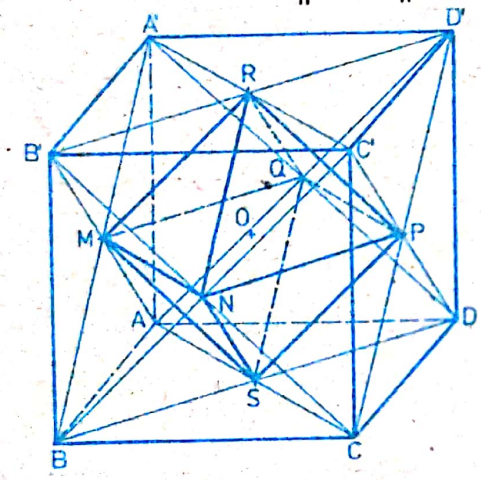


Fig. XI, 7

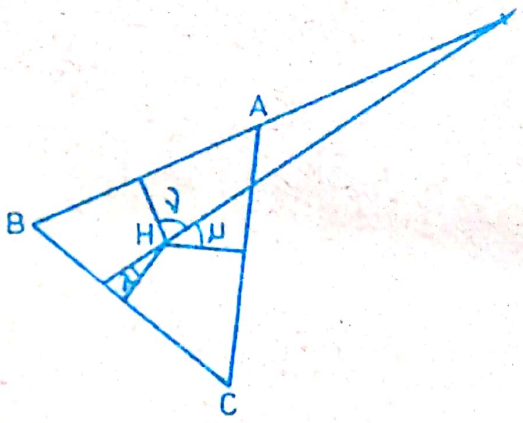


Fig. XI, 8

Se știe că dacă a este lungimea muchiei tetraedrului, atunci: $\|HD\| = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (2).

Folosind (1), (2), relația din enunț devine:

$$\frac{1}{\|MH\|^2} + \frac{1}{\|NH\|^2} + \frac{1}{\|PH\|^2} = \frac{18}{a^2} \quad (3).$$

Problema se reduce la o problemă de geometrie plană. Notăm cu λ, μ, ν măsurile unghiurilor formate de semidreptele $|HM$, $|HN$, $|HP$ cu semidreptele de origine H perpendiculare respectiv pe dreptele BC, AC, AB (fig. XI, 8). Suma lungimilor segmentelor de pe aceste perpendiculare determinate de punctul H și punctele de intersecție cu dreptele AB, BC, CA este $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, iar cele trei semidrepte formează între ele unghiuri cu măsura 120. Avem:

$$\|HM\| = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\lambda},\ \|NH\| = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\mu},\ \|HP\| = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\nu}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît $\mu + \nu = 120$, $\lambda + \mu = 60$ deci $\mu = 60 - \lambda$, $\nu = 60 + \lambda$. Deci:

$$\frac{1}{\|HM\|^2} + \frac{1}{\|HN\|^2} + \frac{1}{\|HP\|^2} = \frac{12}{a^2}(\cos^2\lambda + \cos^2(60 - \lambda) + \cos^2(60 + \lambda)).$$

Folosind relații cunoscute între funcțiile trigonometrice se arată ușor că $\cos^2\lambda + \cos^2(60 - \lambda) + \cos^2(60 + \lambda) = 3/2$. În final, obținem (3).

20. Considerăm piramidele $[MBCS]$, $[MCSA]$, $[MABS]$ și avem

$$v[MCBS] = (1/6)bcx. \quad (1),$$

$$v[MCAS] = (1/6)cay \quad (2)$$

$$v[MABS] = (1/6)abz \quad (3).$$

Dar $v[ABCS] = (1/6)abc$. Adunînd (1), (2), (3) membru cu membru obținem:

$$(1/6)bcx + (1/6)cay + (1/6)abz = (1/6)abc.$$

(fig. XI, 9).

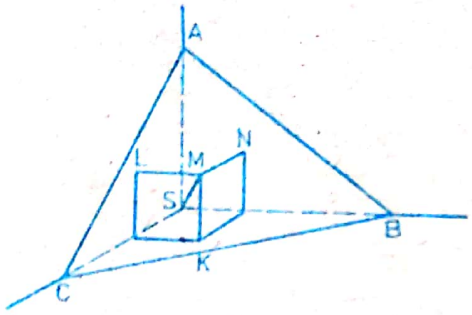


Fig. XI, 9

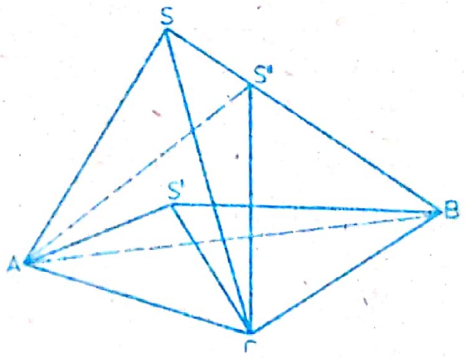


Fig. XI, 10

21. Vom arăta că:

$$m(\widehat{ACS}) + m(\widehat{SCB}) > m(\widehat{ACS'}) + m(\widehat{S'CB}) \quad (1).$$

Fie S'' intersecția dreptei SB cu planul (ACS') (fig. XI, 10).

Considerînd triedrul $[\widehat{CS'S''B}]$ avem:

$$m(\widehat{S'CS''}) + m(\widehat{S''CB}) > m(\widehat{S'CB}).$$

Adunăm la ambii membri în această inegalitate

$m(\widehat{ACS'})$ și avem $m(\widehat{ACS''}) + m(\widehat{S''CB}) > m(\widehat{ACS'}) + m(\widehat{S'CB})$ (2).

Din triedrul $[\widehat{CASS''}]$ avem $m(\widehat{ACS}) + m(\widehat{SCS''}) > m(\widehat{ACS''})$ (3).

Scanned with OKEN Scanner

Substituim în (2) pe $m(\widehat{ACS''})$ folosind (3) şi obţinem:

$$m(\widehat{ACS}) + m(\widehat{SCS''}) + m(\widehat{S''CB}) > m(\widehat{ACS'}) + m(\widehat{S'CB})$$

adică exact (1), inegalitate ce corespunde vîrfului C. Scriind inegalităţile corespunzătoare vîrfurilor A şi B şi adunîndu-le membru cu membru, obţinem că suma măsurilor unghiurilor plane de la bază situate pe feţele laterale ale piramidei exterioare este mai mare decît aceeaşi sumă asociată piramidei interioare. Rămîne să ţinem seama că suma măsurilor tuturor unghiurilor feţelor laterale ale piramidei este $3 \cdot 180$.

22. Fie O şi O' picioarele perpendicularelor din S respectiv M pe planul (ABC). Piramidele $[SABC]$ şi $[MABC]$ au baza comună $[ABC]$ şi $\triangle SS'O \sim \triangle MO'S'$ (fig. XI, 11). Rezultă că:

$$\frac{v[MABC]}{v[SABC]} = \frac{\|MO'\|}{\|SO\|} = \frac{\|MS'\|}{\|SS'\|} \quad (1).$$

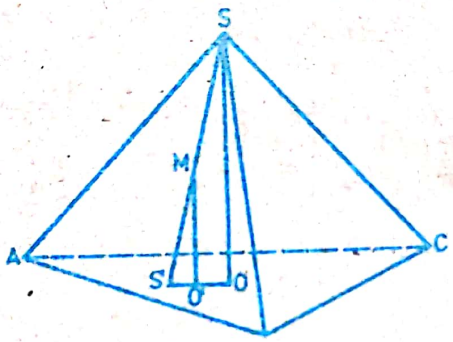


Fig. XI, 11

Analog:

$$\frac{v[MBCS]}{v[SABC]} = \frac{\|MA'\|}{\|SA'\|} \quad (2), \quad \frac{v[MCAS]}{v[SABC]} = \frac{\|MB'\|}{\|SB'\|} \quad (3), \quad \frac{v[MABS]}{v[SABC]} = \frac{\|MC'\|}{\|SC'\|} \quad (4).$$

Adunînd (1), (2), (3), (4) membru cu membru obţinem relaţia 1) din enunţ.

23. Fie $MNPQ$ patrulaterul obţinut prin secţionarea tetraedrului $[ABCD]$ cu un plan; $MNPQ$ este romb dacă şi numai dacă $MN \parallel PQ$, $MQ \parallel NP$, şi $|MN| \equiv |MQ|$. Primele două condiţii sînt satisfăcute dacă şi numai dacă planul cu care secţionăm este paralel cu AB şi CD. Demonstrăm acum că există $M \in [AD]$ astfel încît $|MN| \equiv |MQ|$. Notăm $\|AB\| = c$, $\|CD\| = d$, $\|MN\| = \|MQ\| = x$. Din asemănarea triunghiurilor AMQ şi ADC avem $\frac{x}{d} = \frac{\|AM\|}{\|AD\|}$. Mai avem $\triangle MDN \sim \triangle ADB$, deci $\frac{x}{c} = \frac{\|MD\|}{\|AD\|}$.

De aici $x = \frac{cd}{c+d}$. Prin urmare $\|MD\| = \frac{d\|AD\|}{c+d}$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Fie α planul unic determinat de condițiile: $IB \subset \alpha$, $\alpha \perp AC$. Atunci $AC \cap \alpha \neq \emptyset$ și fie $AC \cap \alpha = \{H\}$. Dacă $AC \perp \alpha$, cum $IH \subset \alpha$ rezultă că $AC \perp IH$. Analog din $BH \subset \alpha$ rezultă $AC \perp BH$. (fig. XI, 12). Avem atunci:

$$2\sigma[IAC] = \| AC \| \cdot \| IH \|,$$

$$2\sigma[ABC] = \| AC \| \cdot \| BH \|.$$

Urmează că:

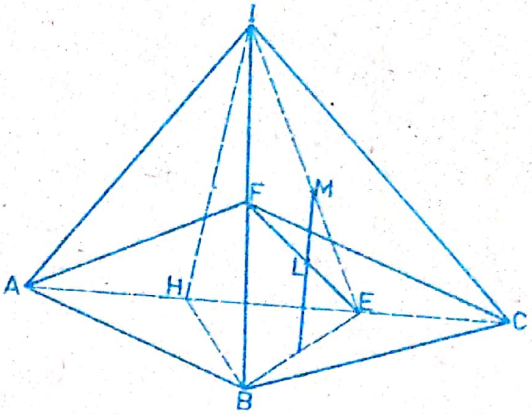


Fig. XI, 12

$$(1) \qquad \frac{\sigma[IAC]}{\sigma[ABC]} = \frac{\| IH \|}{\| BH \|} = \frac{\| LM \|}{\| LN \|},$$

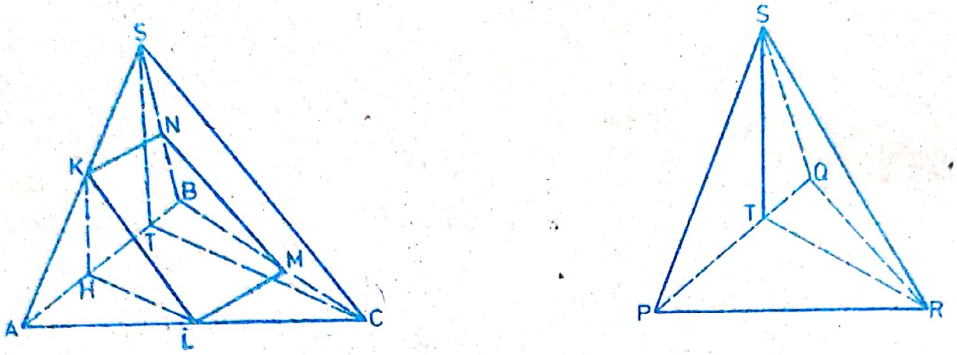
dacă L este un punct arbitrar al locului. Fie $\{E\} = IM \cap AC$. Fie β planul determinat de către dreptele concurente IB și IE. Deoarece $MN \parallel IB$, $M \in \beta$, $IB \subset \beta$ rezultă că $MN \subset \beta$. Dar $N \in (ABC)$. Deci $N \in \beta \cap (ABC) = BE$. Urmează că punctele B, N și E sînt coliniare.
Fie $\{F\} = EL \cap IB$; fasciculul de drepte concurente IE, FE și BE determină pe dreptele paralele MN și IB segmente proporționale:

$$(2) \qquad \frac{\| LM \|}{\| LN \|} = \frac{\| IF \|}{\| BF \|}.$$

Din (1), (2): $\frac{\| IH \|}{\| BH \|} = \frac{\| IF \|}{\| BF \|}$. Conform reciprocei teoremei bisectoarei rezultă că $|HF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{IHB}$. Fie γ planul determinat de AC și F. Locul geometric căutat este secțiunea determinată de γ în piramidă, adică mulțimea Int AFC.

25. Fie $KLMN$ pătratul obținut prin secționarea piramidei $[SABC]$ cu planul α. Deocamdată nu știm care dintre fețele laterale $[ASB]$, $[BSC]$, $[ASC]$ este perpendiculară pe planul (ABC). Presupunem că pătratul $LKNM$ este așezat ca în figura XI, 13a. Deoarece $KN \parallel LM$, KN este paralelă cu planul (ABC). Rezultă că planul ASB, ce trece prin KN, intersectează planul (ABC) după dreapta AB paralelă cu KN.
Analog se arată că $SC \parallel KL$. Rezultă că planul α este paralel cu dreptele AB și SC și că $[AB] \perp [SC]$. Vom demonstra acum că piramida $[SABC]$ are o singură pereche de muchii perpendiculare, însă vom folosi altă figură. Fie $[SPQR]$ piramida în care $(PSQ) \perp (PQR)$ și fie $|ST|$ înălțimea din S a piramidei $[SPQR]$. Evident $[ST] \subset (PSQ)$ și $[ST]$ este înălțime a triunghiului isoscel PSQ, prin urmare $[ST]$ este și mediană a triunghiului PSQ. Rezultă că $[RT]$ este mediană în triunghiul echilateral PQR

și deci și înălțime a acestui triunghi. Aplicînd teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $[SR] \perp [PQ]$. Însă orice dreaptă din planul (PQR) perpendiculară pe muchia $[SQ]$ trebuie să fie perpendiculară și pe proiecția $[PQ]$ a lui $[SQ]$ pe planul (PQR). Dar $[PR]$ nu are această proprietate și deci muchiile $[SQ]$ și $[PR]$ nu sînt perpendiculare. Analog, muchiile $[SP]$ și $[QR]$



a) Fig. XI, 13 b)

nu sînt perpendiculare. Rezultă că sînt perpendiculare doar muchiile $[SR]$ și $[PQ]$, adică muchia care nu este situată în planul perpendicular pe bază și muchia unghiului diedru drept. Ne folosim de figura XI, 13a și avem că $(ASB) \perp (ABC)$. Fie H proiecția lui K pe AB.

Observăm că $KH \perp HL$ deoarece sînt situate în plane perpendiculare și KH este perpendiculară pe dreapta de intersecție a celor două plane perpendiculare. Construim înălțimea $|ST|$ a triunghiului isoscel ASB și înălțimea $|CT|$ corespunzătoare bazei $[ABC]$. Notînd $\|KL\| = x$ avem

$\|ST\| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $\|AT\| = a/2$, $\|AH\| = (a - x)/2$. Deoarece $\triangle AKH \sim$

$\sim \triangle AST$ și $\triangle ALH \sim \triangle ACT$, $\|KH\| = \frac{a - x}{a}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $\|HL\| =$

$= \frac{a - x}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$. Din triunghiul KHL avem $x^2 = \left(\frac{a - x}{a}\right)^2\left(\frac{a^2}{2} + b^2\right)$.

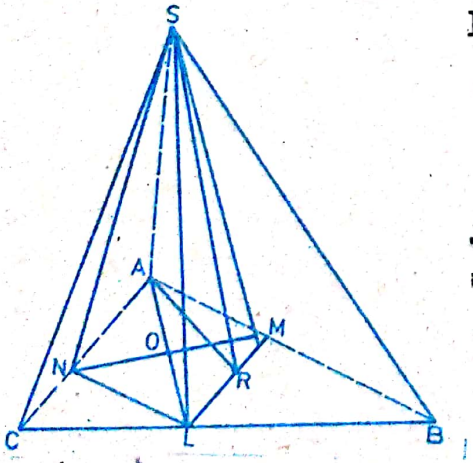


Fig. XI, 14

Din această ecuație deducem pe x și găsim că:

$$\sigma[KLMN] = \frac{a^2(2a^2 + 4b^2)}{(2a + \sqrt{2a^2 + 4b^2})^2}.$$

26. Deoarece $|SL| = |SM| = |SN|$ și $SA \perp (ABC)$ (fig. XI, 14), rezultă $|AL| = |AM| = |AN|$. În particular rezultă $MN \parallel BC$. Condiția $\sigma[NSL] = \sigma[LSM]$ se scrie:

$$1/2\,\|NS\| \cdot \|LS\| \sin \widehat{NSL} =$$

$$= 1/2\,\|MS\| \cdot \|LS\| \sin \widehat{MSL},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem $\widehat{NSL} \equiv \widehat{MSL}$. (Nu putem avea $m(\widehat{NSL}) = 180 - m(\widehat{MSL})$, deoarece atunci fețele laterale ale piramidei $[SLMN]$ nu ar avea arii egale.) Rezultă că $\triangle NSL \equiv \triangle MSL$, de unde în particular avem $|NL| \equiv |ML|$. Prin urmare $\triangle ANL \equiv \triangle AML$ deci $|AL|$ este bisectoarea triunghiului isoscel BAC iar L este mijlocul lui $|BC|$. Fie $|SO|$ înălțime în triunghiul MSN și $|SR|$ înălțime în triunghiul MSL. Atunci condiția $\sigma[MSN] = \sigma[LSM]$ se mai scrie:

$$(1)\quad 1/2 \cdot \|MN\| \cdot \|SO\| = 1/2 \cdot \|ML\| \cdot \|SR\|.$$

Notăm $a = \|AM\|$ și din triunghiul MOA avem:

$$\|MN\| = 2\|MO\| = 2a \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \|AO\| = a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Din SAO obținem: $\|SO\| = \sqrt{h^2 + a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Ținem seama că $|AR$ este bisectoare a unghiului $\widehat{MAL}$ și din ARM avem $\|ML\| = 2\|MR\| = 2a\sin\frac{\alpha}{4}$, $\|AR\| = a\cos\frac{\alpha}{4}$, iar din SAR avem $\|SR\| = \sqrt{h^2 + a^2\cos^2\frac{\alpha}{4}}$.

Egalitatea (1) devine:

$$2a\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{h^2 + a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2a\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{h^2 + a^2\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

De aici:

$$(2)\quad a^2 = 4h^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha}.$$

Deci:

$$v[SLMN] = \frac{1}{6}\|MN\| \cdot \|LO\| \cdot \|AS\| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2}\left(a - a\cos\frac{\alpha}{2}\right)h = \frac{1}{3}a^2h\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{8h^3}{3} \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/4)}{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2\alpha} \cdot \sin(\alpha/2)\sin^2(\alpha/4).$$

După transformări trigonometrice, avem:

$$v[SLMN] = -\frac{4h^3}{3} \cdot \frac{\sin^3(\alpha/4)}{\cos(3\alpha/4)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația (2) are sens dacă și numai dacă $\sin^2(\alpha/2) - \sin^2\alpha > 0$, ceea ce este echivalent cu:

$$\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2) < 0.$$

Ultima inegalitate este satisfăcută pentru $120 < \alpha < 180$.

27. Fie $L \in |AC|$, $M \in |BC|$ astfel încît $KL \perp SC$, $MK \perp SC$. Rezultă că planul (KLM) este perpendicular pe muchia $|SC|$. Prin ipoteză $OK \perp SC$, deci $O \in (KLM)$. Mai mult, punctele L, O, M sînt coliniare și $LM = (KLM) \cap (ABC)$. Proiecția unghiului $\widehat{LKM}$ pe planul (ABC) este unghiul $\widehat{ACB}$, iar proiecția dreptei OK pe planul (ABC) este dreapta OC (fig. XI, 15). Deoarece $|CO$ este bisectoare a unghiului $\widehat{ACB}$, rezultă că $|KO$ este bisectoare a unghiului $\widehat{LKM}$. Rezultă $m(\widehat{LKO}) = m(\widehat{OKM}) = \alpha$. Triunghiurile ASC și BSC fiind congruente, avem $|LK| \equiv |MK|$, deci $|LC| \equiv |MC|$ de unde rezultă că $LM \parallel AB$. Din triunghiurile dreptunghice OKM și OCM avem $\|OC\| = a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Dar $\|OC\|$ este raza cercului circumscris triunghiului echilateral ABC. Rezultă că $\|AB\| = 3a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ și deci putem calcula aria triunghiului ABC. Din triunghiul KOC avem $\sin\widehat{OCK} = \dfrac{\|OK\|}{\|OC\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Deoarece $\widehat{KOS} \equiv \widehat{OCK}$, rezultă că $\|SO\| = a/\cos\widehat{OCK} = a\sqrt{3}/\sqrt{3 - \mathrm{ctg}^2\alpha}$. În final obținem:

$$v[SABC] = \frac{1}{3}\|SO\| \cdot \sigma[ABC] = \frac{9}{4}a^3 \cdot \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\sqrt{3 - \mathrm{ctg}^2\alpha}}.$$

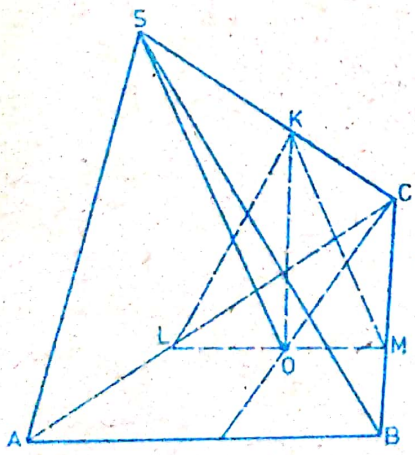


Fig. XI, 15

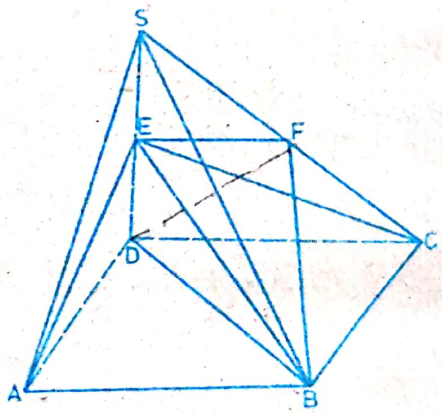


Fig. XI, 16

31. Observăm că dreapta AB este paralelă cu planul (DSC) (fig. XI, 16). Fie F mijlocul muchiei $|SC|$. Atunci planul (ABF) intersectează muchia $|SD|$ în E astfel că $EF \parallel AB$ și deci $EF \parallel DC$. Prin urmare $|EF|$ este linie mijlocie în triunghiul DSC. Vom calcula volumul corpului situat

„sub" planul $(ABFE)$ ca suma volumelor unor piramide. Mai precis, secționăm poliedrul $[CFBDEA]$ cu planul (BEC) și obținem două piramide: piramida patrulateră $[EABCD]$, cu vîrful în E și baza $[ABCD]$ și piramida triunghiulară $[FBCE]$, cu vîrful F și baza $[BCE]$. Înălțimea piramidei $[EABCD]$ este jumătate din înălțimea piramidei $[SABCD]$. Atunci volumul piramidei $[EABCD]$ este jumătate din volumul piramidei $[SABCD]$. Volumul piramidei $[EBCF]$ este jumătate din volumul piramidei $[DBCF]$ deoarece aceste piramide au baza $[BCF]$ comună, iar înălțimea piramidei $[EBCF]$ este jumătate din înălțimea piramidei $[DBCF]$. Observăm că volumul piramidei $[DBCF]$ este o pătrime din volumul piramidei $[SABCD]$. Rezultă că volumul piramidei $[EBCF]$ este 1/8 din volumul piramidei $[SABCD]$ și deci volumul poliedrului $[CFBDEA]$ este 5/8 din volumul acestei piramide.

32. Notăm cu K și F mijloacele muchiilor $|AB|$ și $|AD|$ (fig. XI, 17 a). Observăm că KF intersectează dreptele BC, CD în puncte notate cu M și E respectiv. Se arată ușor că $\triangle BKM \equiv \triangle AKF \equiv \triangle DEF$, de unde rezultă că $\| MB \| = 1/2 \| BC \|$, $\| ED \| = 1/2 \| CD \|$; notăm cu N mijlocul muchiei $|CS|$. Punctele M și N sînt situate în planul (BCS) și dreapta MN intersectează muchia $|BS|$ într-un punct L. Vom determina poziția punctului L pe muchia $|BS|$ folosind figura XI, 17b; fie $|NQ|$ linie mijlocie

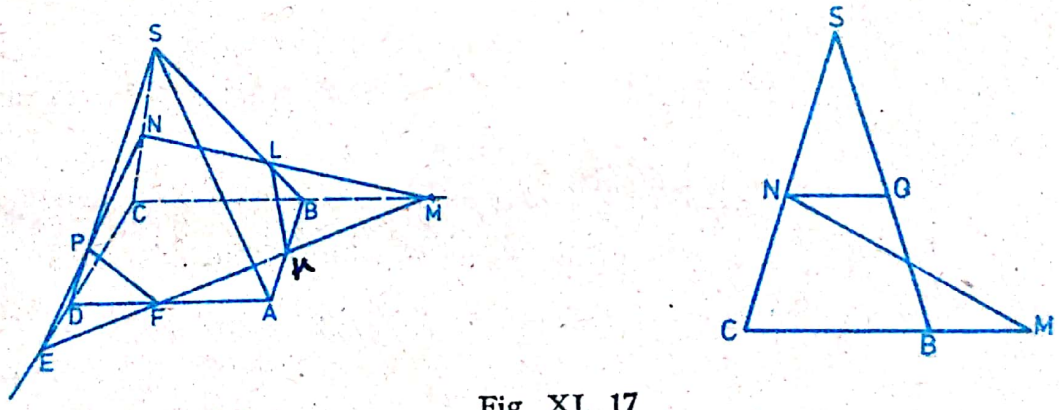


Fig. XI. 17

în triunghiul BCS. Observăm că $\triangle NQL \equiv \triangle BLM$ deci $\| BL \| = 1/2 \| BQ \| = 1/4 \| BS \|$. Analog se arată că $\| DP \| = 1/2 \| SD \|$, unde $\{P\} = EN \cap SD$. Secțiunea în piramidă este pentagonul $LKFPN$. Observăm că: $v[CDFKBLNP] = v[NECM] - v[LKMB] - v[PEDF]$. Presupunem că $v[SABCD] = \frac{a^2 H}{3}$, unde a este lungimea muchiei bazei $[ABCD]$ iar H lungimea înălțimii piramidei coborîtă din S. Deoarece N este mijlocul muchiei $|CS|$, rezultă că distanța de la N la planul $(ABCD)$ este $\frac{H}{2}$. Analog,

Scanned with OKEN Scanner

distanțele de la L și P la planul $(ABCD)$ sînt egale cu $\frac{H}{4}$. Calculînd ariile bazelor piramidelor $[NECM]$, $[LKMB]$ și $[PDEF]$ obținem: $\frac{9a^2}{8}$, $\frac{a^2}{8}$ și $\frac{a^2}{8}$ respectiv. Obținem: $v[CDFKBLNP] = \frac{9a^2H}{48} - 2\frac{a^2H}{96} = 1/2\, v[SABCD]$.

33. Din $\| BD \| = 2 \| AC \|$ rezultă că $\widehat{ABC}$ este ascuțit. Presupunem că $|AB| \equiv |BS|$. Atunci, triunghiul fiind isoscel, sau 1) $|AS| \equiv |BS|$ sau 2) $|AS| \equiv |AB|$.

În situația 1) din $\triangle ASB \equiv \triangle BSC$ avem $|CS| \equiv |BS|$ și analog $|DS| \equiv |CS|$. Rezultă că toate muchiile laterale ale piramidei $[SABCD]$ sînt congruente și deci înălțimea piramidei trebuie să treacă prin centrul cercului circumscris rombului $ABCD$. Dar acest romb nu este pătrat, așa că nu i se poate circumscrie un cerc. Contradicție. În situația 2), din $\triangle ASB \equiv \triangle BSC$ rezultă că $|CS| \equiv |AS| \equiv |AB| \equiv |BC|$, iar din $\triangle ASD \equiv \triangle ASB$ rezultă că $|BS| \equiv |DS|$. Triunghiurile ASB, BSC fiind isoscele cu baza $|BS|$ rezultă că $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$ sînt ascuțite. Avem $\triangle ASC \equiv \triangle ABC$ (L.L.L.) și deci $\widehat{ASC} \equiv \widehat{ABC}$, iar medianele $|SO|$ și $|BO|$ sînt congruente. Din $SO \perp BO$ rezultă $m(\widehat{SBO}) = 45$. Rezultă că $m(\widehat{SDB}) = m(\widehat{SBO}) = 45$ și deci $m(\widehat{BSD}) = 90$. În acest caz, nici o pereche de muchii laterale nu formează unghi obtuz. Astfel $|AB| \equiv |BS|$. Observăm că $\triangle BSD \equiv \triangle BAD$ și deci unghiul $\widehat{BSD}$ este într-adevăr obtuz. Din congruența fețelor laterale deducem că $|DS| \equiv |BS|$, $|CS| \equiv |AS|$. Deoarece $|OS|$ este înălțime în triunghiurile ASC și DSB, $OS \perp BD$, $OS \perp AC$, ceea ce înseamnă că $|OS|$ este înălțime a piramidei. Notăm $a = \| AB \|$. Prin calcul direct: $\| OB \| = \frac{2a}{5}$.

$$\| AO \| = \frac{a}{5},\ \| SO \| = \sqrt{\| SB \|^2 - \| OB \|^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5},$$

$$\| SC \| = \sqrt{\| OS \|^2 + \| OC \|^2} = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Astfel în ASB laturile sînt exprimate în funcție de a. Din $\sigma[ABC] = 3/2$, conform ipotezei, rezultă $a = \sqrt{5}$. Astfel $\| SC \| = 1$, $\| AC \| = 2$, $\| BD \| = 4$. În final $v[SABCD] = 4/3$.

Scanned with OKEN Scanner

35. Bazele piramidelor $[SANM]$ și $[SMDN]$ au înălțimea comună $|NN_1|$ și $|AM| \equiv |MD|$, prin urmare au arii egale (fig. XI, 18). Deci $v[SANM] = v[SMDN] = V$. Piramidele $[SABN]$, $[SANM]$ au înălțime comună. Rezultă că raportul volumelor lor este egal cu raportul ariilor bazelor.

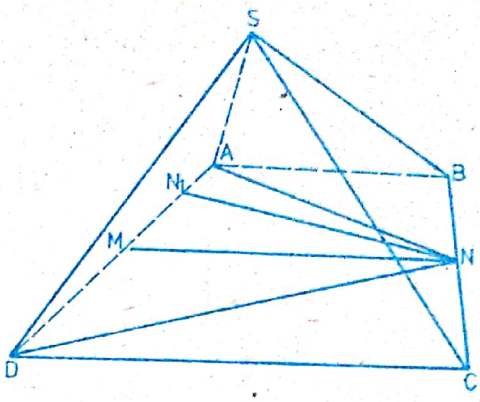


Fig. XI, 18

Dar $\dfrac{\sigma[ABN]}{\sigma[AMN]} = \dfrac{\|AB\|}{\|MN\|}$ și deci:

$\dfrac{v[SABN]}{v[SANM]} = \dfrac{\|AB\|}{\|MN\|}$; adunînd cu formula analoagă $\dfrac{v[SDNC]}{v[SDNM]} = \dfrac{\|DC\|}{\|MN\|}$ obținem $v[SABN]+v[SDNC]=1/2v[SABCD]$, de unde $v[SABCD] = \dfrac{4}{3}\sigma[MSN] \cdot h$, h fiind distanța de la AB la (SMN).

36. Să presupunem că unghiul $\widehat{ASB}$ are măsura cea mai mare. Avem: $m(\widehat{ASB}) < m(\widehat{ASD}) + m(\widehat{DSB})$, $m(\widehat{DSB}) < m(\widehat{DSC}) + m(\widehat{BSC})$, deoarece într-un triedru, un unghi plan are măsura mai mică decît [suma măsurilor celorlalte două unghiuri plane. Rezultă că:

$$m(\widehat{ASB}) < m(\widehat{ASD}) + m(\widehat{DSC}) + m(\widehat{BSC}).$$

37. Observăm că $|O_1S| \equiv |O_1A_1|$, $\triangle SA_2A_5 \equiv \triangle A_1SA_4$, deci $|O_1A_1| \equiv |O_1A_2|$. Triunghiurile $O_1O_2A_1$, $O_1O_2A_2$, O_1O_2S sînt congruente și deci $\widehat{O_1O_2A_1} \equiv \widehat{O_1O_2A_2} \equiv \widehat{O_1O_2S}$, deci O_1O_2 este perpendiculară pe planul (SA_1A_2) (fig. XI, 19).

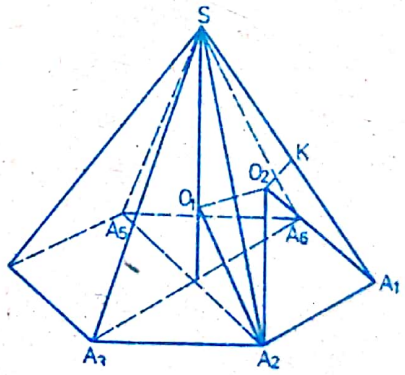


Fig. XI, 19

38. Fie K mijlocul laturii $|A_1A_2|$ și r raza cercului circumscris poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$. Avem $SK \perp A_1A_2$ și $\|SA_2\| = r/\cos\alpha$; $\|KA_2\| = r\sin\dfrac{\pi}{n}$; $\cos\widehat{SA_2K} = \dfrac{\|KA_2\|}{\|SA_2\|} =$

$= \sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha$. Deci $m(\widehat{SA_2K}) = m(\widehat{SA_1K}) = \arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha\right)$. Pentru punctul 2) avem $\|OK\| = r\cos\dfrac{\pi}{n}$; $\|SO\| = \|OK\|\operatorname{tg}\beta = r\cos\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$;

$\operatorname{tg}\widehat{SA_2O} = \dfrac{\|SO\|}{\|SA_2\|} = \cos\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$, deci $m(\widehat{SA_2O}) = \operatorname{arctg}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

39. Secţionînd cubul $[T]$ (fig. XI, 20), obţinem paralelogramul $AMBN$, de arie $\sigma[AMBN] = \| AB \| \cdot \| MK \|$, $MK \perp AB$. Aria va fi minimă cînd lungimea segmentului $|MK|$ este minimă. Prin urmare $|MK|$ este perpendiculara comună dreptelor CE şi AB. Se obţine:

$$\sigma[AMBN] = (a^2\sqrt{6})/2, \quad a = \| AC \|.$$

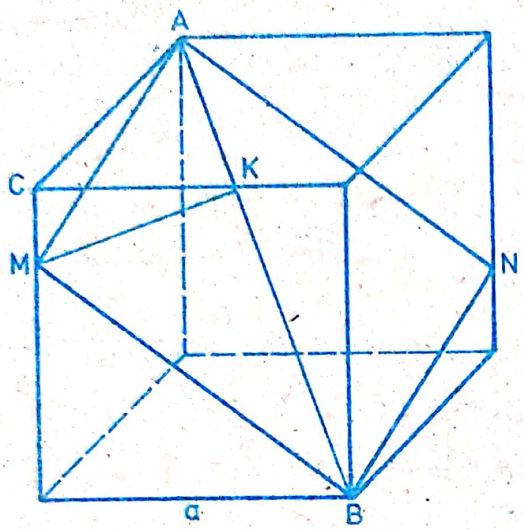


Fig. XI, 20

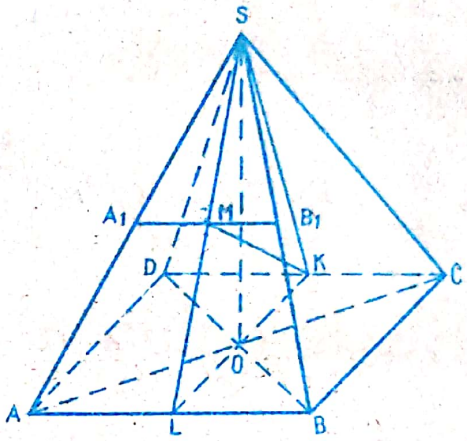


Fig. XI. 21

40. În piramida $[SABCD]$ planul bisector al unghiului diedru de muchie $|CD|$ intersectează faţa opusă $[ASB]$ după dreapta A_1B_1 (fig. XI, 21). Avem $A_1B_1 \| CD$ (1). Prin înălţimea piramidei ducem planul perpendicular pe $|CD|$; $O_1K \perp CD$ deoarece $OK \perp CD$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $KM \perp A_1B_1$ (3). Triunghiul SKL este isoscel deoarece $m(\widehat{SKO}) = m(\widehat{SLO}) = 60$ şi $|KM$ este bisectoare. Rezultă că $|KM| \perp |SL|$ (4). Din (3), (4) rezultă că $KM \perp (ASB)$. Planul bisector (CDA_1B_1) trece prin KM şi deci $(CDA_1B_1) \perp (ASB)$.

41. Secţionăm poliedrul cu un plan P paralel cu bazele şi la distanţe egale faţă de planele bazelor, adică $H/2$. Aria acestei secţiuni este B_3 şi alegem un punct S în această secţiune. Considerăm toate piramidele care au ca vîrf pe S şi baze feţele laterale ale poliedrului iniţial. Volumele celor două piramide, ale căror baze sînt bazele superioară şi inferioară ale poliedrului sînt $(1/3)\ B_1 \cdot (H/2) = (1/6) \cdot B_1H$ şi $(1/6)\ B_2H$. Celelalte piramide, care au ca baze feţe laterale, au volume egale cu: $(4/3)\ \sigma[MSN] \cdot (H/2)$, unde $|MN|$ este linie mijlocie a unei feţe laterale, obţinută prin secţionarea feţei cu planul P. Adunînd volumele piramidelor laterale, punem în evidenţă suma ariilor secţiunilor de forma $[MSN]$, egală cu B_3. Rezultă că suma volumelor piramidelor laterale este egală cu $(4/3)B_2(H/2)$. În final, volumul poliedrului este $V = (1/6)\ H\ (B_1 + B_2 + 4B_3)$.

Scanned with OKEN Scanner

43. Fie $ABCD$ trapezul în care $AB \parallel CD$ și $|MN|$ este linie mijlocie. (fig. XI, 22). Prin dreapta MN construim planul $(MM_1N_1N) \parallel (AA_1B_1B)$, iar prin dreapta NN_1 construim planul $(EFF_1E_1) \parallel (ADD_1A_1)$. Avem $\sigma[AA_1E_1E] = \sigma[MM_1N_1N] = 1/2(S_1 + S_2)$. $[AEFDA_1E_1F_1D_1]$ este paralelipiped de volum $1/2(S_1 + S_2)h$. $v[AEFDA_1E_1F_1D_1] = v[ABCDA_1B_1C_1D_1]$ deoarece $v[CNFC_1N_1F_1] = v[NEBN_1E_1B_1]$.

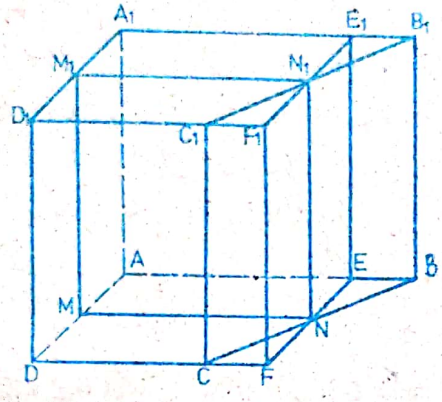


Fig. XI, 22

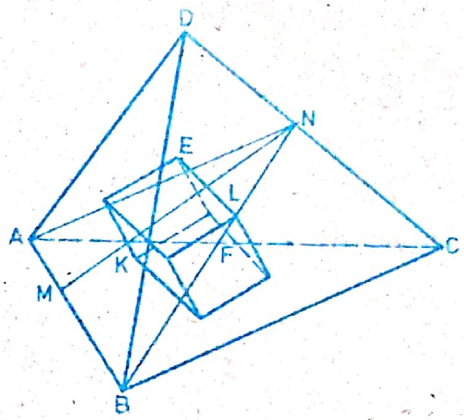


Fig. XI, 23

44. Observăm că patru muchii ale cubului sînt paralele cu AB iar celelalte patru sînt paralele cu CD. Fie K și L punctele de intersecție ale dreptei MN cu fețele cubului (fig. XI, 23). Notăm $\|KL\| = x$, $\|KM\| = y$, $\|NL\| = z$. Atunci $x + y + z = c$ (1). Planul (ABN) este paralel cu o față a cubului, deoarece MN și AB sînt paralele cu unele muchii ale cubului. Avem $\triangle EFN \sim \triangle ABN$ și deci $\frac{\|EF\|}{\|AB\|} = \frac{\|LN\|}{\|MN\|}$. Rezultă $z = \frac{cx}{a}$. Analog $y = \frac{cx}{b}$. Se substituie în (1) și se obține relația din enunț.

45. O piramidă a cărei bază este un poligon cu n laturi are $n = 2m$ muchii, $m \geqslant 3$. Pentru a construi un poliedru cu $n = 2m + 1$, $m \geqslant 4$, muchii se consideră o piramidă $[T]$ cu $2(m - 1)$ muchii. Fie S un vîrf al bazei piramidei $[T]$, iar M, N, P mijloacele a trei muchii care conțin pe S. Secționînd piramida $[T]$ cu planul (MNP) și dînd la o parte piramida $[SMNP]$, partea rămasă din piramida $[T]$ are $2m - 2 + 3 = 2m + 1$ muchii, unde $m - 1 \geqslant 3$, adică $m \geqslant 4$. Poliedre cu 7 muchii nu există; într-adevăr, dacă una din fețele poliedrului nu este triunghi, atunci numărul muchiilor acestei fețe este $\geqslant 4$ și deci numărul muchiilor poliedrului este $\geqslant 8$. Dacă toate fețele poliedrului sînt triunghiuri, iar numărul lor este s, atunci numărul muchiilor este $k = 3s/2$. Prin urmare k este divizibil cu trei, deci $k \neq 7$.

Scanned with OKEN Scanner

46. Fie $a \leqslant b \leqslant c$ lungimile a trei muchii. Avem $\sigma = 2(ab + bc + ca)$ (1), σ fiind aria totală a paralelipipedului. Inegalitatea $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$ se mai scrie: $2(ab + bc + ca) \leqslant \frac{2}{3}(a+b+c)^2$ (2). Deoarece $a+b+c = \frac{L}{4}$, din (1), (2) deducem $\sigma \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{24}$.

47. În problema precedentă am stabilit că $\sigma \leqslant \frac{L^2}{24}$, deci $L \geqslant 2\sqrt{6S}$.

53. Fie A', B', C' vîrfurile unei fețe a octaedrului regulat, M' centrul feței $[A'B'C']$, O centrul de simetrie al octaedrului. Considerînd piramida regulată $[OA'B'C']$, înălțimea ei din O va trece prin M'. Un raționament analog se face și pentru fața opusă $[A''B''C'']$ și se ține seama că $(A'B'C') \parallel (A''B''C'')$.

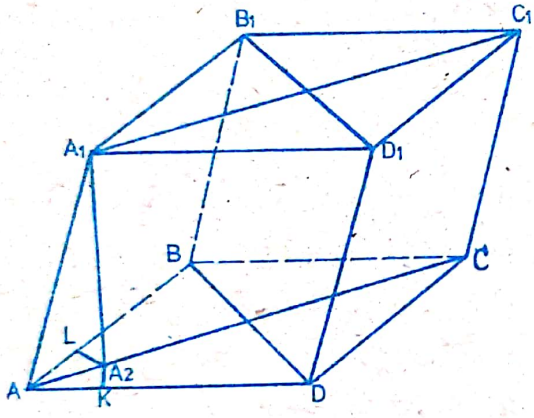


Fig. XI, 24

54. Fie $|A_1A_2|$ înălțime a paralelipipedului (fig. XI, 24). Construim $A_2K \perp AD$ și $A_2L \perp AB$. Rezultă că $A_1K \perp AD$ și $A_1L \perp AB$. Avem $\triangle AA_1K \equiv \triangle AA_1L$ și deci $|A_1K| \equiv |A_1L|$. Prin urmare $|A_2K| \equiv |A_2L|$ și deci A_2 este situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$. Observăm că $BD \perp (AA_1C_1C)$ și deci BB_1D_1D este dreptunghi. Secțiunea diagonală AA_1C_1C conține $AA_2 \perp (ABCD)$ și deci

$$(AA_1C_1C) \perp (ABCD).$$

56. Presupunem că vîrful A_0 este situat pe muchiile $|A_0A_1|$, $|A_0A_2|$, $|A_0A_3|$. Deoarece poliedrul $[W]$ are centru de simetrie, vîrful A_0', simetricul lui A_0, este situat pe trei muchii $|A_0'A_1'|$, $|A_0'A_2'|$, $|A_0'A_3'|$, unde A_i', $i = 1, 2, 3$, sînt simetricele vîrfurilor A_i. Fie π_i planul care trece prin centrul de simetrie al poliedrului și prin muchia $|A_0A_i|$, $i = 1, 2, 3$. Planul π_i conține și muchia $|A_0'A_i'|$ și din enunț rezultă că $[W] \cap \pi_i$ este paralelogramul $A_0A_iA_0'A_i'$. Fie $[S_{jk}]$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$ fața poliedrului $[W]$ care trece prin vîrfurile A_0, A_j, A_k iar $[S_{jk}']$ fața simetrică. Dacă numerele j și k sînt diferite de i și $j, k = 1, 2, 3$, atunci planul π_i intersectează fața $[S_{jk}]$. Deoarece $A_0 \in [S_{jk}]$, $A_0' \notin [S_{jk}]$ și $A_i \notin [S_{ik}]$ atunci $A_i' \in [S_{jk}]$. Analog se arată că $A_i \in [S_{jk}']$. Dacă $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ și sînt două cîte două distincte, atunci conform celor arătate mai sus, avem $A_i, A_j' \in [S_{jk}']$, $A_i, A_j' \in [S_{ik}]$. Pentru $i \neq j$, $|A_j'A_i|$ este muchie a poliedrului $[W]$, iar paralelogramele $A_0A_iA_j'A_k$ și $A_0'A_i'A_jA_k'$ sînt fețe. Astfel $[W]$ are 6 fețe care sînt două cîte două paralele deoarece $[W]$ are centru de simetrie. Rezultă că $[W]$ este un paralelipiped.

Scanned with OKEN Scanner

57. Compunînd simetria centrală în raport cu mijlocul perpendicularei comune a celor două drepte cu simetria plană față de unul din planele determinate de perpendiculara comună și o dreaptă dintre cele două, obținem o transformare care duce o dreaptă peste cealaltă. Compunerea aceasta este o simetrie axială. A treia axă de simetrie este perpendiculara comună a celor două drepte.

59. 1) $|AB| \equiv |BC| \equiv |CD| \equiv |DA|$. Planele de simetrie conțin muchiile $|BD|$ și $|AC|$. Intersecția lor este o axă de simetrie. 2) $|AB| \equiv |DC|$, $|BC| = |AD|$. Axele de simetrie trec prin mijloacele muchiilor $|AC|$ și $|BD|$. 3) $|AB| \equiv |DC|$, $|BC| \equiv |AD|$, $|AC| \equiv |BD|$. Axele de simetrie trec prin mijloacele muchiilor opuse.

60. Deoarece $\sigma[ABC] = \sigma[ABD]$ rezultă că înălțimile corespunzătoare $|CC_1|$ și $|DD_1|$ ale acestor fețe sînt congruente. Din mijlocul M al muchiei $|CD|$ ducem perpendiculara $|MN|$ pe $|AB|$. Punctele C_1, N, D_1 sînt la intersecția muchiei $|AB|$ cu planele ce trec prin C, M, D și sînt perpendiculare pe AB. Deoarece aceste plane sînt paralele și $|CM| \equiv |MD|$ rezultă că $|C_1N| \equiv |ND_1|$. Deoarece $\triangle DD_1N \equiv \triangle CC_1N$ rezultă că $|ND| \equiv |NC|$ și din triunghiul DNC avem că $|NM| \perp |CD|$.

61. Notăm $a = \beta \cap \gamma$, $b = \gamma \cap \alpha$, $c = \alpha \cap \beta$. Fie a_1 și c_1 proiecțiile ortogonale ale dreptelor a și c respectiv, pe planele α și γ. Planul δ este planul determinat de dreptele a_1 și c_1.

62. Rezultă imediat că d este perpendiculară pe planul (OAB). Deoarece P este în planul (OAB) rezultă că $d \perp OP$, deci $d \subset \pi$. Rezultă că π se rotește în jurul lui d cînd P descrie AB **(O. N. Țino** [26]).

64. Fie α', β', γ' planele paralele cu α, β, γ care trec prin A, B, respectiv C și se vor intersecta într-un punct Q. Printr-o omotetie se păstrează paralelismul așa încît $F(\alpha') = \alpha, F(\beta') = \beta, F(\gamma') = \gamma$. Mai mult $F(Q) = P$. Rezultă că centrul de omotetie va fi pe dreapta PQ. Locul geometric căutat este dreapta PQ din care se scot punctele P și Q.

65. Printr-o omotetie se păstrează măsurile unghiurilor și deci perpendiculara comună p a dreptelor a și b se transformă în perpendiculara comună p_1 a dreptelor a_1 și b_1. Dacă $a \cap p = \{A\}$, $b \cap p = \{B\}$, $a_1 \cap p_1 = \{A_1\}$, $b_1 \cap p_1 = \{B_1\}$ rezultă că $|A_1B_1| \parallel |AB|$. Considerăm omotetia sau translația care duce pe A în A_1 și pe B în B_1.

66. Considerăm omotetia F cu centrul în O și de raport K (semnul acestuia depinde de poziția lui O față de cele două plane). Imaginea lui α prin această omotetie este un plan $\alpha' = F(\alpha)$. Rezultă dreapta $d' = \beta \cap \alpha'$ și locul geometric al dreptelor d va fi planul determinat de punctul O și dreapta d'. În cazul cînd α și β sînt paralele locul geometric este sau mulțimea vidă sau este formată din toate dreptele care trec prin O și nu sînt paralele cu planele date (cînd unul din plane este imaginea celuilalt printr-o omotetie cu centrul în O).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XII

CORPURI ROTUNDE

1. Planul (BA_1D_1C) este perpendicular pe DC_1, deci este perpendicular și pe axa cilindrului (fig. XII, 1). Proiecția lui A pe acest plan este mijlocul A_2 al segmentului $[A_1B]$. Proiecția suprafeței laterale a cilindrului pe planul (BA_1D_1C) este cercul ce trece prin B, A_2 și D_1. Raza acestui cerc este raza cilindrului. Deci $R = \frac{a_1a_2a_3}{4S}$ unde $a_1 = \| BA_2 \|$, $a_2 = \| A_2D_1 \|$, $a_3 = \| BD_1 \|$, $S = \sigma[BA_2D_1]$; avem $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $a_3 = a\sqrt{3}$, iar din triunghiul A_1A_2D avem $a_2 = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ deci $S = \frac{1}{2} \| A_2B \| \cdot \| A_1D_1 \| = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$. În final obținem $R = \frac{3\sqrt{2}}{4} a$.

2. $\arcsin \frac{\sqrt{ab}}{h}$.

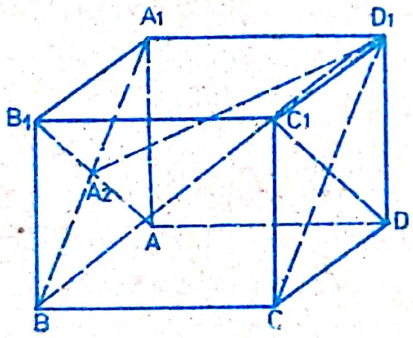


Fig. XII, 1

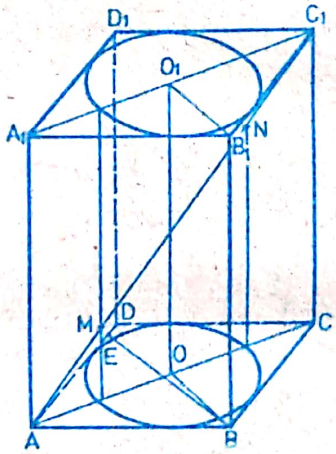


Fig. XII, 2

6. Fie $[ABCD]$ și $[A_1B_1C_1D_1]$ fețele paralelipipedului care sînt circumscrise bazelor cilindrului, astfel încît $m(\widehat{BAD}) = \alpha$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (fig. XII, 2). Paralelogramul circumscris unui cerc este romb, deci $ABCD$ este romb. Fie $|BE|$ înălțime în romb, deci $\|BE\| = 2r$, iar din triunghiul ABE găsim $\| AB \| = \frac{2r}{\sin \alpha}$. Avem $\sigma[ACD] = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$. Paralelipipedul și cilindrul au aceeași înălțime iar volumele lor sînt $\frac{20\,r^3}{\sin \alpha}$ și $5\pi r^3$ respectiv. Deoarece raportul volumelor lor este $\frac{5}{\pi}$, deducem $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, deci $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din triunghiul AOB obținem $\|AO\| = \|AB\| \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}r$, deci $\|AC\| = 2\|AO\| = 2\sqrt{5}r$. Secționăm cilindrul cu planul (AA_1C_1C) și $[AC_1]$, $[A_1C]$ sînt diagonalele mari, iar secțiunea este dreptunghiul PP_1Q_1Q. Intersecția dreptunghiului PP_1Q_1Q cu diagonala $|AC_1|$ este mulțimea $\{M, N\}$. Avem $\|AC_1\| = \sqrt{\|AC\|^2 + \|CC_1\|^2} = 3\sqrt{5}r$, iar din $\frac{\|MN\|}{\|AC_1\|} = \frac{\|PQ\|}{\|AC\|}$ avem $\|MN\| = \frac{\|AC_1\| \cdot \|PQ\|}{\|AC\|} = 3r$, deoarece $\|PQ\| = 2r$.

7. $R = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi^2 h^4 + 4A^2} - \pi h^2}{2\pi}}$.

10. $2(\sqrt{2} - 1)R$.

12. Secționăm conurile cu un plan perpendicular pe generatoarea lor comună (fig. XII, 3). Avem $\operatorname{tg} x = \frac{b}{\|AV\|}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\|AV\|}$, $b = a\cos x$. Obținem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, deci $2x = 2\arcsin\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

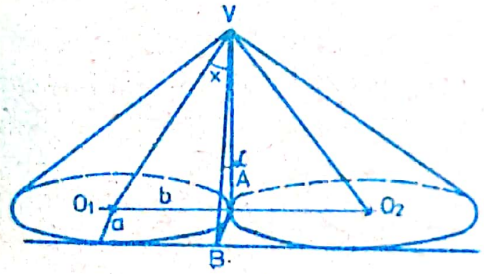


Fig. XII, 3

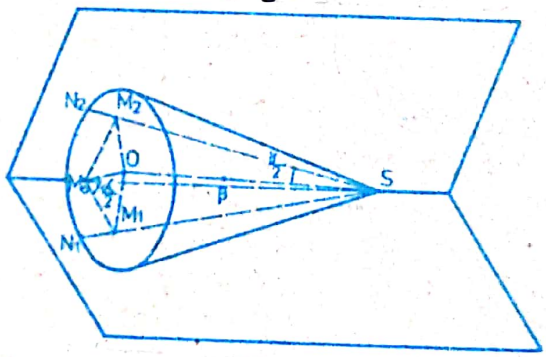


Fig. XII, 4

13. Vîrful S al conului este situat pe muchia unghiului diedru (fig. XII, 4); fie O centrul cercului de bază, $\|SO\| = a$, OM_0 perpendiculara pe muchia unghiului diedru, OM_1, OM_2 perpendiculare pe fețele unghiului diedru. Atunci SN_1 și SN_2 sînt generatoarele de tangență și $m(\widehat{OSM_1}) = m(\widehat{OSM_2}) = \frac{\gamma}{2}$, iar $m(\widehat{M_1M_0M_2}) = \alpha$, $m(\widehat{OSM_0}) = \beta$. Din triunghiurile OSM_1 și OSM_2 avem $\|OM_1\| = \|OM_2\| = a\sin\frac{\gamma}{2}$. Rezultă că $|M_0O$ este bisectoare a unghiului $\widehat{M_1M_0M_2}$. Din triunghiul OM_0M_1 avem $\|OM_0\| = \frac{\|OM_1\|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = a\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, iar din triunghiul OSM_0 avem $\|OM_0\| = a\sin\beta$.

Scanned with OKEN Scanner

14. $\alpha = \arcsin 3/5$.

17. $16\sqrt{3}\,r^3$.

19. Presupunem că punctele A_i, $i = 1,2,\ldots, n$ sînt coplanare. Dacă luăm atunci un punct M nesituat în planul acestor puncte și notăm cu N proiecția lui M pe acest plan, avem: $m(\widehat{MNA_i}) = 90$, $i = 1, 2,\ldots,n$, ceea ce arată că N aparține sferelor de diametre $|MA_i|$, $i = 1,2\ldots,n$. Reciproc, să presupunem că sferele de diametre $|MA_i|$ mai au un punct comun N, $N \neq M$. Atunci $NA_i \perp MN$, $i = 1,2,\ldots,n$. Dar reuniunea perpendicularelor pe dreapta MN în punctul N este planul perpendicular pe această dreaptă în acest punct; rezultă că punctele A_i aparțin acestui plan.

(M. Țena, G.M. 5/1977)

20. $r/2$, $3r/2$, 12.

21. Fie P_{ik}, $i<k$, planul asociat sferelor $\mathcal{S}(O_i, r_i)$ și $\mathcal{S}(O_k, r_k)$. Arătăm că planele P_{12}, P_{13}, P_{23} se intersectează după o dreaptă. Fiecare dintre aceste plane este perpendicular pe planul $(O_1O_2O_3)$, deoarece este perpendicular pe una din liniile centrelor sferelor $\mathcal{S}(O_i, r_i)$, $i = 1,2,3$. Mai mult, aceste plane trec prin punctul O_4 de intersecție a bisectoarelor triunghiului $O_1O_2O_3$. Rezultă că dreapta de intersecție a planelor P_{12}, P_{13} și P_{23} este perpendiculara pe planul $O_1O_2O_3$ dusă prin O_4. Notăm această dreaptă cu d_4. La fel se arată că planele P_{23}, P_{24}, P_{34} se intersectează după o dreaptă d_1 perpendiculară pe planul $O_2O_3O_4$ și care trece prin centrul cercului înscris în triunghiul $O_2O_3O_4$. Rămîne să arătăm că perpendicularele duse pe fețele tetraedrului $[O_1O_2O_3O_4]$ în centrele cercurilor înscrise în fețe sînt concurente. Fie $\{O\} = d_1 \cap d_4$ și arătăm că $O \in d_2$, $O \in d_3$. Punctul O există deoarece d_1 și d_4 sînt neparalele și conținute în P_{23}. Observăm că $O \in P_{12} \cap P_{24}$ deoarece $d_4 \subset P_{12}$ și $d_1 \subset P_{24}$. Dar $d_3 = P_{12} \cap P_{24}$ și deci $O \in d_3$. Analog se arată că $O \in d_2$.

23. Observăm că $SH \perp (ABCD)$ și $O \in SH$. Avem $m(\widehat{COH}) = 180 - 2\varphi$ și deci $\|OH\| = R\cos(180 - 2\varphi) = -R\cos 2\varphi$. O este exterior piramidei deoarece $\cos 2\varphi < 0$. De asemenea, $\sigma[ABCD] = 2R^2 \sin^2 2\varphi \sin\alpha$, și $v[SABCD] = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot \sin\alpha$.

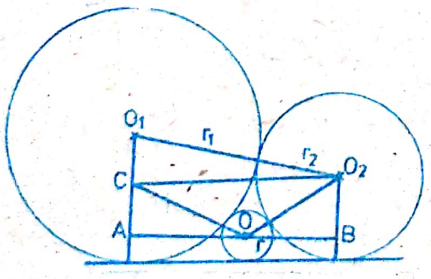


Fig. XII, 5

25. Secționăm cele trei sfere cu un plan ce trece prin centrele O_1 și O_2 (fig. XII, 5). Acest plan secționează sfera $\mathcal{S}(O_3, r_3)$ după un cerc de rază r. Avem $r_3 \geqslant r$ și mai avem: $\sqrt{\|O_1O_2\|^2 - \|O_1C\|^2} = \|AO\| + \|OB\|$ sau:

$$\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2} + \sqrt{(r_2 + r)^2 - (r_2 - r)^2}.$$

Din ultima egalitate rezultă $r = \dfrac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

26. Fie M, N, P, Q punctele de tangență ale muchiilor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ cu sfera. Punctele A și B, B și C, C și D sînt separate de către planul (MNP) și deci și punctele A și D sînt separate. Fie $\{R\} = AD \cap (MNP)$; vom arăta că R coincide cu Q. Fie A', B', C', D' proiecțiile punctelor A, B, C, D pe planul (MNP). Înmulțim membru cu membru relațiile: $\frac{\|AM\|}{\|BM\|} = \frac{\|AA'\|}{\|BB'\|}$, $\frac{\|BN\|}{\|CN\|} = \frac{\|BB'\|}{\|CC'\|}$, $\frac{\|CP\|}{\|DP\|} = \frac{\|CC'\|}{\|DD'\|}$, $\frac{\|DR\|}{\|AR\|} = \frac{\|DD'\|}{\|AA'\|}$ și ținem seama de relațiile $|AM| \equiv |AQ|$, $|BM| \equiv |BN|$ etc. Obținem $\|AQ\| \cdot \|DR\| = \|DQ\| \cdot \|AR\|$, de unde: $\|AQ\| = \|AR\|$, adică $R = Q$.

27. $|SB|$ este înălțime în piramida $[SBO_1O_2]$, deoarece $|BO_1| \perp |SB|$ și $|BO_2| \perp |SB|$. Fie $\{D\} = AS \cap (BCO_1)$; $|BD|$ și $|CD|$ sînt înălțimi în triunghiurile ABS și ACS respectiv și $\|BD\| = \|CD\| = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Din $\triangle BDK \sim \triangle BDO_1$ obținem $\|BO_1\| = a\sqrt{\frac{b^2 - \frac{a^2}{4}}{3b^2 - a^2}}$. Analog se calculează $\|BO_2\|$ și rezultă că $|BO_1| \equiv |BO_2|$. Punctele A, C, O_1 și O_2 sînt coplanare deoarece $AO_2 \perp (ACS)$, $CO_1 \perp (ACS)$. Patrulaterul ACO_1O_2 este paralelogram, deoarece $AO_2 \parallel CO_1$ și $|AO_2| \equiv |CO_1|$. În particular $\|O_1O_2\| = \|AC\| = a$. Se calculează aria lui BO_1O_2 în funcție de lungimile laturilor etc.

28. Fie K al doilea punct de intersecție al dreptei AC cu sfera $\mathcal{S}(O, r)$. Avem: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \|CC'\|^2 = \|CK\| \cdot \|AC\| = \|CK\| \cdot a$, deci $\|KC\| = \frac{a}{2}$. Analog, sfera $\mathcal{S}(O, r)$ este intersectată de dreapta AS în E și avem $\|ES\| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, iar dreapta AB mai intersectează sfera $\mathcal{S}(O, r)$ în F, mijlocul muchiei $|AB|$. Fie N centrul cercului circumscris triunghiului AKF și Q proiecția lui S pe planul (ABC). Punctul O este intersecția liniei mijlocii $|NR|$ a triunghiului ASQ cu mediatoarea segmentului $|AE|$ situată în planul (ASQ). Fie P mijlocul segmentului $|AE|$. Avem $r = \|AO\| = \sqrt{\|AP\|^2 + \|PO\|^2}$, iar $\|AP\| = \frac{1}{2} \cdot \|AE\| = \frac{3}{8}a\sqrt{2}$. Din $\triangle OPR \sim \triangle ANR$ rezultă că $\|PO\| = \frac{\|PR\| \cdot \|AN\|}{\|NR\|} = \frac{a\sqrt{10}}{40}$, deci $r = \frac{a\sqrt{115}}{20}$.

Scanned with OKEN Scanner

29. Se formează patru triunghiuri sferice congruente de arie σ_1 și șase poligoane sferice cu două laturi congruente, de arie σ_2. Avem $4\sigma_1 + 6\sigma_2 = 4\pi r^2$. Observăm că $\sigma_1 + 3\sigma_2$ este aria unei calote sferice de înălțime $\frac{2}{3}r$ deci $\sigma_1 + 3\sigma_2 = \frac{4}{3}\pi r^2$. Obținem $\sigma_1 = \frac{2}{9}\pi r^2$, $\sigma_2 = \frac{2}{3}\pi r^2$.

30. Fie D, E, F, M, N, L punctele de tangență ale sferei $\mathcal{S}(O, r)$ cu muchiile $|BC|$, $|AB|$, $|AC|$, $|SC|$, $|SA|$, $|SB|$. Din $\triangle SMO \equiv \triangle SNO \equiv \triangle SLO$ rezultă $\triangle AKS \equiv \triangle BKS \equiv \triangle CKS$. În particular, $|AS| \equiv |BS| \equiv |CS|$. Se arată că $|AN| \equiv |BL| \equiv |CM|$. Ținem seama că tangentele dintr-un punct exterior la sferă sînt congruente și deducem că D, E, F sînt mijloacele muchiilor $|BC|$, $|AB|$, $|AC|$. Prin urmare $|AB| \equiv |BC| \equiv |CA|$. Punctul K este centrul cercului circumscris triunghiului ABC deoarece $|AS| \equiv |BS| \equiv |CS|$ și deci piramida $[SABC]$ este regulată. Avem: $\triangle AKS \sim \triangle ONS$ deci $\|SK\| = \frac{\|AK\| \cdot \|NS\|}{\|NO\|}$. Notăm $\|SK\| = h$ și ținem seama că $\|ON\| = r$, $\|NS\| = r\sqrt{2}$, $\|AK\| = \frac{h}{2}$, $\|OD\| = r$, $\|OK\| = h - r\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic OKD avem $\frac{h^2}{8} = r^2 - (h - r\sqrt{3})^2$ de unde obținem $h_1 = \frac{4}{3}r\sqrt{3}$, $h_2 = \frac{4}{9}r\sqrt{3}$. A doua soluție nu satisface condițiile problemei.

31. Fie K mijlocul segmentului $|EF|$, α planul perpendicular pe EF trecînd prin K, β planul $(AA'C'C)$. Notînd cu $\mathcal{S}(O, r)$ sfera căutată, O este situat pe dreapta $l = \alpha \cap \beta$. Construim cubul $[ABCDNQPM]$ și pătratul $AA'L'L$. Observăm că dreapta l coincide cu AP. Notăm $\|OP\| = x$ și observăm că distanța de la O la planul $(BB'C'C)$ este $\frac{x}{\sqrt{3}}$, iar $m(\widehat{OAE}) = 90 + m(\widehat{CAP})$. Avem: $\|DE\|^2 = (a\sqrt{3} - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2(a\sqrt{3} - x)\frac{a}{2} \cdot \cos \widehat{OAE}$, $\sin \widehat{CAP} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

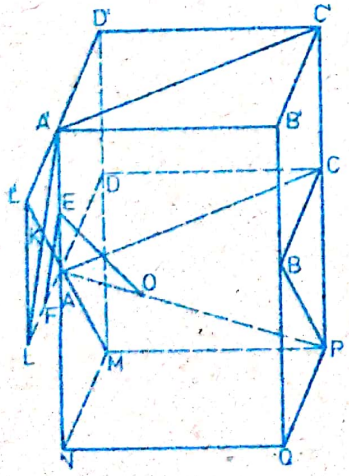


Fig. XII, 6

deci x este soluție a ecuației:

$$x^2 + \frac{17a^2}{4} - \frac{7\sqrt{3}}{3}ax = \frac{x^2}{3}.$$

Rezolvînd obținem: $r = \frac{7 - \sqrt{15}}{4}a$ (fig. XII, 6).

Scanned with OKEN Scanner

32. Centrele celor patru sfere sînt vîrfurile unui tetraedru regulat, iar centrele sferelor a cincea și a șasea coincid cu centrul acestui tetraedru. Fie r_1 și r_2 razele sferelor a cincea și a șasea, r raza primelor patru sfere. Avem: $r_1 = r_2 + 2r$ și $r_2 + r = \frac{\sqrt{6}}{2} r$. Rezultă că raportul volumelor nu depinde de r și prin calcul obținem reultatul.

33. Deoarece sferele $\mathcal{S}(O_i, r)$ sînt congruente, rezultă că centrele lor sînt situate la distanțe egale de O și deci centrul cubului $[O_1O_2...O_8]$ coincide cu O. Observăm că $\| O_1O_2 \| = 2r$, iar $\|O_1O\| = \|AO\| - \|AO_1\| = R - r$. Pe de altă parte, $\| O_1O \| = \frac{1}{2} \cdot 2r\sqrt{3}$ și deci r este soluție a ecuației $R - r = r\sqrt{3}$.

34. Fie $\mathcal{S}(O_i, r)$, $\mathcal{S}(O, R)$, $i = 1,2$ cele trei sfere, P mijlocul segmentului $|O_1O_2|$, Q proiecția lui O pe muchia diedrului dat. Scriind că triunghiul OO_1P este dreptunghic, obținem $R^2\cos^2\alpha - 2r(1 + \sin^2\alpha)R + r^2 = 0$, de unde:

$$R_{1,2} = \frac{1 + \sin^2\alpha \pm \sqrt{3\sin^2\alpha + \sin^4\alpha}}{\cos^2\alpha} \cdot r.$$

35. Prin B construim planul α, $\alpha \perp CD$ și apoi dreapta $AP \| CD$, $P \in \alpha$. Rezultă că $|ON| \equiv |AP|$, unde $\{N\} = \alpha \cap CD$. Deoarece $m(\widehat{AOC}) = 90$, $m(\widehat{APB}) = 90$, $m(\widehat{BAP})$ = măsura unghiului dreptelor AB și $CD = 60$, rezultă că:

$$\|AP\| = \|AB\| \cdot \cos 60 = \frac{r}{2}.$$

Prin urmare α trece prin mijlocul lui $|OC|$ sau $|OD|$. Primul caz nu este posibil deoarece $|BC| > |AC|$ și deci N este mijlocul lui $|OD|$.

36. Fie M, N, P, Q proiecțiile lui O pe fețele $[ASB]$, respectiv $[BSC]$, $[CSD]$, $[DSA]$. Avem $AB \perp (SOM)$, $BC \perp (SON)$, $CD \perp (SOP)$, $AD \perp (SOQ)$. Proiecțiile lui O pe dreptele AB, BC, CD, AD sînt punctele: $\{M'\} = AB \cap (SOM)$, $\{N'\} = BC \cap (SON)$, $\{P'\} = CD \cap (SOP)$, $Q' = AD \cap (SOQ)$. Patrulaterele $AM'OQ$, $BN'OM'$, $CP'ON'$, $DQ'OP'$ sînt inscriptibile, de unde rezultă că și patrulaterul $M'N'P'Q'$ este inscriptibil. Punctele M, N, M', N' sînt situate pe cercul obținut prin intersecția sferei de diametru $|OB|$ cu planul (SMN). Punctele M' și N' fiind situate pe două cercuri, rezultă că există o sferă $\mathcal{S}_1$ care conține punctele M', N', P', Q', M, N. Analog, punctele M', N', P', Q', N, P sînt situate pe o sferă $\mathcal{S}_2$, iar punctele M', N', P', Q', P, Q sînt situate pe o sferă $\mathcal{S}_3$. Sferele $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ sînt congruente deoarece conțin punctele M', N', P', Q'. Punctele M, N, P, Q sînt situate pe sfera $\mathcal{S}$ de diametru $|OS|$ deci sînt situate pe cercul $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_1$.

Scanned with OKEN Scanner

37. Fie O_1, O_2, O_3 ortocentrele triunghiurilor BSC, respectiv ACS, ASB și $\mathcal{S}(O, r)$ sfera pe care sînt situate punctele O_1, O_2, O_3, S. Punctul O este situat pe înălțimea piramidei. Obținem $v[SABC] = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2(h - 2r)$.

38. Fie (AKB), $K \in [CD]$, planul ce trece prin muchia $|AB|$ și prin centrul sferei înscrise în piramida $[ABCD]$ iar π planul perpendicular pe AB și care trece prin K. Notăm cu c și d paralelele prin C respectiv D la dreapta AB și $\{C'\} = c \cap \pi$, $\{D'\} = d \cap \pi$, $\{T\} = AB \cap \pi$. În triunghiurile $AC'B$ și $AD'B$ segmentele $|C'T|$ și $|D'T|$ sînt înălțimi. Deci:

$$\|C'T\| \cdot \|AP\| = 2p, \quad \|D'T\| \cdot \|AB\| = 2q.$$

Exprimînd în două moduri aria triunghiului $C'TD'$ avem:

$$\frac{1}{2} \cdot \|KT\| \cdot \|C'T\| \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\|KT\| \cdot \|D'T\| \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\|C'T\| \cdot \|D'T\| \sin\alpha$$

de unde $\|AB\| \cdot \|KT\| = \frac{4pq}{p+q} \cos\frac{\alpha}{2}$. Dar $|KT|$ este înălțime în triunghiul AKB. Rezultă:

$$\sigma[AKB] = \frac{2pq}{p+q} \cos\frac{\alpha}{2}.$$

39. Fie O_1 proiecția lui O pe planul (YSZ). Atunci O_1 este centrul cercului $(YSZ) \cap \mathcal{S}(O, r)$. Notăm $\{A\} = OO_1 \cap Ox$ și fie B proiecția lui A pe SZ. Rezultă că $|O_1B|$ este raza cercului $(YSZ) \cap \mathcal{S}(O, r)$. Fie O_2 proiecția lui O pe planul (XSZ). Rezultă că $\triangle OO_1B \equiv \triangle OO_2B$. Avem:

$$\|SB\| = R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad \|AB\| = \frac{2R}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

și $\cos \widehat{O_1BO_2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2}$. Din triunghiul OO_1B deducem:

$$r = \frac{R}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin\left(60 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(30 - \frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

40. Fie M proiecția lui O pe $|BC|$ și N proiecția lui O pe $|SM|$; N este punctul de tangență al sferei $\mathcal{S}(O, r)$ cu planul (BCS). Notînd cu K și L punctele de tangență ale sferei $\mathcal{S}(O, r)$ cu muchiile $|AB|$ și $|AC|$ respectiv, rezultă că $|AO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ și $\|AL\| = \|AK\| = r\sqrt{3}$. Avem $\|CL\| = \|OM\| = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$, $\|BC\| = 5r$, $r = \frac{\sqrt{3}}{4}$ și deci $\|AC\| = 5/4$.

Scanned with OKEN Scanner

41. Triunghiul BSC este isoscel (fig. XII, 7). Dacă $|SK|$ este înălțime în triunghiul BSC, atunci $|AK|$ este înălțime în triunghiul BAC și $m(\widehat{AKS}) = \beta$. Centrul sferei circumscrise piramidei $[SABC]$ este punctul de intersecție al perpendicularei pe planul (BSC) ridicată în centrul L al cercului circumscris triunghiului BSC, cu planul mediator al segmentului $|AS|$. Avem $\|AK\| =$

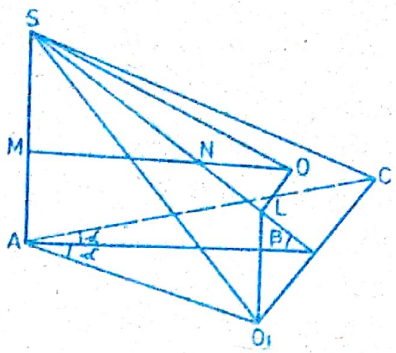


Fig. XII, 7

$$= \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \|SK\| = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{2 \cos \beta}, \quad \|SL\| = \frac{a(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Punctul O este exterior triunghiului KAS deoarece:

$$\|SN\| = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{4 \cos \beta} < \frac{a(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \beta} = \|SL\|,$$

N fiind mijlocul segmentului $|SK|$. Rezultă că $m(\widehat{ONL}) = \beta$ și deci:

$$\|LO\| = \frac{a}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta.$$

Din triunghiul dreptunghic OLS avem $R = \sqrt{\|SL\|^2 + \|LO\|^2} = \frac{a\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^4 \alpha}}{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \beta}$.

44. Din $\triangle ASC \equiv \triangle BSC$ rezultă că $\|AS\| = \|BS\| = r\sqrt{2}$. În plus $\|AC\| = BC = r\sqrt{3}$ și $\|CS\| = \|DS\| = r$, deoarece $m(\widehat{DCS}) = 45$, D fiind mijlocul lui $|AB|$. Fie x lungimea razei uneia dintre sferele căutate și fie O centrul ei. Distanțele de la O la planele (ACS), (BCS) sînt egale cu x, iar distanța de la O la planul (ABC) este $r - 2\sqrt{2}x$. Cele două sfere sînt tangente interior sau exterior după cum distanța dintre centrele lor este egală cu diferența sau suma razelor lor. Deci:

$$(r \pm x)^2 = 2\left(\frac{r\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 + (r - 2\sqrt{2}x)^2,$$

de unde găsim:

$$x_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{10 + 6\sqrt{2}}}{9} r;$$

$$x_{3,4} = \frac{3\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}}{9} r.$$

Scanned with OKEN Scanner

45. $\dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\, r.$

46. Presupunem prin absurd că distanța dintre oricare două puncte dintre cele 1980 este mai mare sau egală cu 1. Rezultă că sferele de raze egale cu 1/2 care au centrele în punctele considerate sînt disjuncte sau cel mult tangente exterior. Toate aceste sfere sînt însă incluse în cubul de latură 10 care are fețele paralele cu cele ale cubului inițial și situate față de acestea la o distanță egală cu 1/2. Scriind că suma volumelor celor 1980 de sfere nu depășește volumul cubului de latură 10, obținem:

$$1980 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \leqslant 10^3 \text{ sau } \pi \leqslant \frac{1\,000}{330} = 3{,}03\ldots, \text{ contradicție.}$$

(Titu Andreescu, G.M. 2/1980)

47. Fie h, h' înălțimile celor două calote sferice determinate de către planul de secțiune. Atunci $h + h' = 2R$, $h/h' = k$. Raza r a cercului de secțiune este înălțimea unui triunghi echilateral de latură l, deci $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$. În plus $(R - h)^2 + r^2 = R^2$.

48. Centrele celor patru sfere formează un tetraedru regulat $[O_1O_2O_3O_4]$ de muchie $2R$, R fiind raza unei sfere. Raza r a cilindrului este $r = 2R$, iar înălțimea sa este $h = \| A_1A_2 \| + 2R$, A_1, A_2 fiind mijloacele muchiilor $|O_1O_2|$ respectiv $|O_2O_3|$. Se arată că $h = (2 + \sqrt{2})R$. Volumul cilindrului este $\pi(2R)^2 \cdot (2 + \sqrt{2})R = 4\pi R^3(2 + \sqrt{2}) = 3V(2 + \sqrt{2})$.

49. Avem $\| O'_1A \| = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$, deci $\| O'_1A \| = r\sqrt{3}$ (fig. XII, 8). Ținem seama că $\| O'_1O'_2 \| = 2r$, $\| OO'_1 \| = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}r$, de unde $\| OA \| = \| OO'_1 \| + \| O'_1A \| = 5r/\sqrt{3}$.

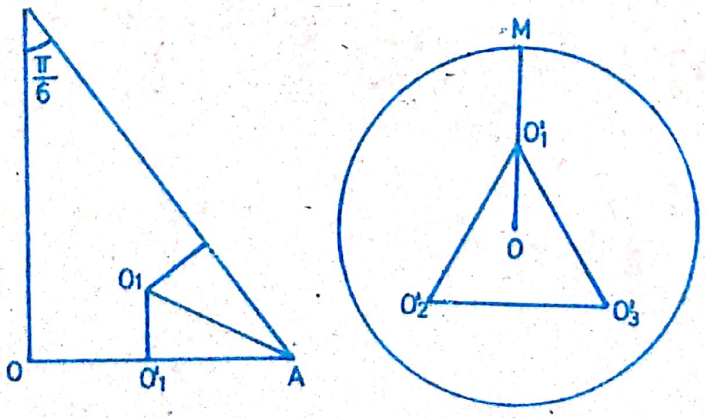


Fig. XII, 8

50. Dacă W este vîrful, O centrul bazei unui con circular drept și Q un punct situat în planul bazei conului, atunci unghiul dintre dreapta WQ și generatoarea WR a conului are măsura maximă cînd $O \in QR$ (fig. XII, 9). Într-adevăr, fie R un punct arbitrar situat pe cercul bazei conului. Atunci:

$$\| QR \|^2 = \| WR \|^2 + \| WQ \|^2 - 2 \| WR \| \cdot \| WQ \| \cdot \cos \widehat{QWR}.$$

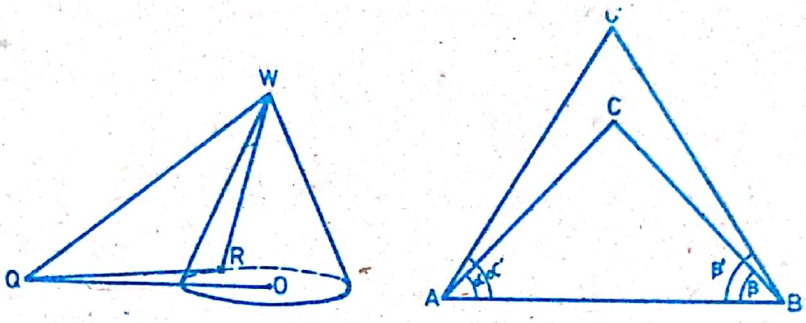


Fig. XII, 9

Lungimile $\| WR \|$, $\| WO \|$ nu depind de poziția lui R pe cerc. Rezultă că $m(\widehat{QWR})$ este maximă atunci cînd cosinusul său este minim, adică lungimea $\| QR \|$ este maximă. Această condiție este îndeplinită dacă $O \in QR$. Fie $ABC' \in X$, astfel încît $O \in \text{Int}\, ABC'$. Fie $\alpha' = m(\widehat{BAC'})$, $\beta' = m(\widehat{ABC'})$. În mod analog, pentru orice $ABC \in X$, fie $\alpha = m(\widehat{BAC})$, $\beta = m(\widehat{ABC})$. Deoarece AC este tangentă la sfera $\mathcal{S}(O, r)$, ea este o generatoare a conului circular drept de axă AO. Conform demonstrației anterioare: $\alpha' \geqslant \alpha$ și $\beta' \geqslant \beta$. Dacă triunghiurile ABC și ABC' ar fi coplanare am avea $\text{Int}\, ABC \subset \text{Int}\, ABC'$. Ar însemna că perimetrul și aria lui ABC' nu sînt mai mici decît perimetrul și aria lui ABC.

52. Fie O_1, O_2 și O_3 centrele celor trei cercuri. Tetraedrul $[OO_1O_2O_3]$ este regulat, avînd muchia de lungime $\frac{\sqrt{3}\, r}{2}$ și înălțimea $\frac{r}{\sqrt{2}}$. Secționăm sfera cu planul ce trece prin OO_1 și este perpendicular pe planul $(O_1O_2O_3)$ (fig. XII, 10a). Fie r_1 și r_2 razele cercurilor căutate. Avem $\| OC \| =$

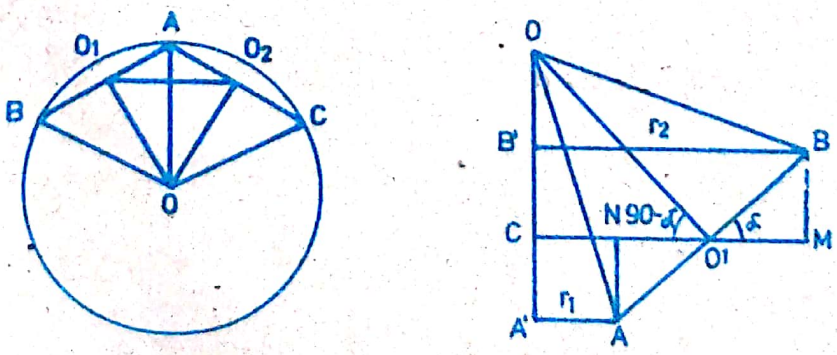


Fig. XII, 10

$= \frac{r}{\sqrt{2}}$; $\|CO_1\| = \frac{r}{2}$. Notăm $\|NO_1\| = \|MO_1\| = x$ și observăm că $\cos\alpha =$

$= \sin(90 - \alpha) = \frac{\|CO\|}{\|OO_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Deci $x = \frac{r}{2}\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{6}}$. Rezultă că

$$r_1 = \frac{r}{2} - \frac{r}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\, r,$$

$$r_2 = \frac{r}{2} + \frac{r}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\, r.$$

53. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ o sferă care intersectează două sfere $\mathcal{S}_1(O_1, R_1)$, $\mathcal{S}_2(O_2, R_2)$ după câte un cerc mare. Dacă M_1 și M_2 sînt pe cercurile mari de intersecție ale sferei $\mathcal{S}$ cu $\mathcal{S}_1$, respectiv $\mathcal{S}_2$ avem $\|O_1M_1\|^2 + \|O_1O\|^2 = \|O_2M_2\|^2 +$ $+ \|O_2O\|^2 = R^2$ de unde obținem $\|O_1O\|^2 - \|O_2O\|^2 = R_2^2 - R_1^2$ (constant). Rezultă că O se află într-un plan perpendicular pe $|O_1O_2|$. Acest plan este simetricul planului radical al celor două sfere față de planul mediator. Locul geometric căutat este intersecția a trei plane perpendiculare pe segmentele $|O_1O_2|$, $|O_1O_3|$ și $|O_2O_3|$, în cazul că punctele O_1, O_2 și O_3 nu sînt coliniare. Dacă d este dreapta de intersecție a două din aceste plane rezultă imediat că d se află și în al treilea plan. Fie O un punct oarecare pe d. Sfera de centru O și rază $a_i = \sqrt{\|O_iO\|^2 + R_i^2}$ $(i = 1, 2, 3)$ intersectează $\mathcal{S}(O_i, R_i)$ după un cerc mare și avem din construcția planelor $a_1 = a_2 = a_3$. Dacă centrele sferelor date sînt coliniare, locul geometric este mulțimea vidă.

(Stere Ianuș, G.M. 9/1981)

54. Notînd $d(O, \alpha) = x$, razele cercurilor de intersecție sînt $\sqrt{R^2 - x^2}$ și $\sqrt{R^2 - (a-x)^2}$. Se obține $x = \frac{a \pm \sqrt{4R^2 - 4Ra - a^2}}{2}$. Trebuie să avem $4R^2 - 4Ra - a^2 \geqslant 0$ și $a > 0$, de unde rezultă $a \in (0, 2R(\sqrt{2}-1))$. Mai trebuie să avem $x > 0$ și rezultă $a \in \left(\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1),\ 2R(\sqrt{2}-1)\right)$.

(G. D. Simionescu, G.M., 1936 p. 52)

55. $\|AA'\| = \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}}$.

56. Fie H proiecția lui S pe planul (ABC) și M proiecția lui S pe AB. Notăm $\|SC\| = a$ și deci $m(\widehat{SCH}) = 60$, $m(\widehat{SHC}) = 90$, $\|SH\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|HC\| = \frac{a}{2}$. Dacă A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele muchiilor $|SA|$, respectiv $|SB|$

și $|CS|$ atunci patrulaterele AA_1B_1B și BB_1C_1C sînt trapeze isoscele și deci $|SA| \equiv |SB| \equiv SC| \equiv |AB|$. În particular, $\|SM\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și deci $|SH| \equiv |SM|$, de unde rezultă că $H = M$. Mai avem că $\|HA\| = \|HB\| = \|HC\| = \frac{a}{2}$ deoarece $|AS| \equiv |BS| \equiv |CS|$. Se arată ușor că H este centrul sferei ce trece prin A, B, C, A_1, B_1, C_1 și deci $\|HA\| = \frac{a}{2} = 1$. Rezultă că $a = 2$ și $\|SH\| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

57. Dreapta determinată de mijloacele muchiilor $|AC|$ și $|BD|$ este axă de simetrie a tetraedrului.

59. Fie $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ două cercuri date și două puncte $M_1 \in \mathcal{C}_1$, $M_2 \in \mathcal{C}_2$. Cercul căutat îl notăm cu $\mathcal{C}$ și fie M_1', M_2' alte două puncte astfel că $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C} = \{M_1, M_1'\}$ și $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C} = \{M_2, M_2'\}$. Dreptele M_1M_1' și M_2M_2' sînt situate în planul π al cercului $\mathcal{C}$. Presupunem că aceste două drepte se intersectează în M. Punctul M are aceiași putere ρ față de cele trei cercuri $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ și avem $\rho = \|MM_1\| \, \|MM_1'\| = \|MM_2\| \cdot \|MM_2'\|$ (*). Dacă $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$ sînt două sfere care conțin cercurile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$, punctul M va avea aceiași putere ρ față de cele două sfere $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$. Rezultă că M se află în planul radical α al sferelor $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$. Pe de altă parte M se află și pe dreapta d de intersecție a planelor cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, deci $\{M\} = d \cap \alpha$. Cercul căutat $\mathcal{C}$ este cercul circumscris patrulaterului inscriptibil $M_1M_2M_2'M_1'$ unde $\{M_1'\} = MM_1 \cap \mathcal{C}_1$ și $\{M_2'\} = MM_2 \cap \mathcal{C}_2$, (vezi relația (*)). Dacă α nu intersectează d înseamnă că nu există un punct M care să aibă puteri egale față de cele două cercuri. În acest caz M_1M_1' este paralelă cu M_2M_2'; rezultă că trebuie să avem și $\|M_1M_2\| = \|M_1'M_2'\|$, cînd patrulaterul inscriptibil $M_1M_2M_2'M_1'$ este trapez isoscel. Dacă α conține d avem o infinitate de soluții ([14]).

60. Dacă r_1 și r_2 sînt razele celor două cercuri atunci omotetiile au rapoartele $K_1 = \frac{r_1}{r_2}$ și $K_2 = -\frac{r_1}{r_2}$, iar centrele lor sînt situate pe dreapta ce trece prin centrele cercurilor. În cazul sferelor se consideră două cercuri situate în două plane paralele care trec prin centrele sferelor.

63. Fie π un plan care trece prin dreapta O_1O_2 și intersectează cele două sfere după două cercuri mari. Tangentele exterioare și tangentele interioare ale celor două cercuri se intersectează în punctele O și O' situate pe linia centrelor O_1O_2 astfel că $O_2 \in |O_1O|$ dacă $r_1 > r_2$ și $O' \in |O_1O_2|$. Există două inversiuni în π avînd polurile în O și O' care transformă un cerc în celălalt. Cînd planul π se rotește în jurul axei O_1O_2 cele două puncte O și O' nu se schimbă.

Scanned with OKEN Scanner

Avem astfel două inversiuni în spațiu care schimbă o sferă în cealaltă, una fiind de putere pozitivă, iar cealaltă de putere negativă. Conul cu vîrful în O generat de tangentele exterioare determină pe cele două sfere două cercuri care aparțin unei sfere invariante. La fel pentru tangentele interioare, rezultă două cercuri situate pe o sferă invariantă.

64. Sfera căutată are centrul $O' \in OO_1$ astfel încît triunghiul determinat de O, O' și un punct oarecare de pe cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ este un triunghi dreptunghic.

65. Se consideră sferele $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$ care trec prin cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$, respectiv $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ și sînt ortogonale sferei $\mathcal{S}(O, r)$ (vezi problema precedentă). Ținînd seama de problema **63** rezultă că există două inversiuni care transformă $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$ una în cealaltă, cu polurile de inversiune în punctul O' de intersecție al tangentelor exterioare, respectiv în punctul O'' de intersecție al tangentelor interioare. Sfera $\mathcal{S}(O, r)$ va fi invariantă față de inversiunea cu polul în O'' deoarece este ortogonală sferelor $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$. Astfel cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ sînt situate pe conul cu centrul în O'' și avînd ca generatoare tangentele interioare (ale căror puncte de tangență cu $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$ sînt cercurile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$). Analog rezultă un con cu vîrful în O' care conține cele două cercuri date.

66. Mai întîi să justificăm că se poate forma un triunghi cu $|OA|$, $|OB|$ și $|OC|$. Să observăm că proiecția O' a lui O pe planul (ABC) va fi un punct situat în interiorul unuia din unghiurile triunghiului ABC sau în interiorul unghiului opus acestuia sau pe laturile sale. Să presupunem că $O' \in \operatorname{Int} \widehat{BAC}$. Facem o rotație a triunghiului OBC în jurul lui BC astfel încît imaginea lui O prin această rotație să fie punctul $O'' \in \operatorname{Int} \widehat{BAC}$. Astfel am obținut patrulaterul $ABCO''$ în care aplicînd inegalitatea lui *Ptolemeu* obținem:

$$\|AB\| \, \|CO''\| + \|AC\| \, \|BO''\| \geqslant \|BC\| \, \|AO''\|.$$

Dar ABC este echilateral și mai avem $\|CO'\| = \|CO\|$, $\|BO''\| = \|BO\|$, $\|AO''\| > \|AO\|$. Cazul cînd O se proiectează în unul din vîrfurile triunghiului ABC se verifică ușor. Să considerăm acum o inversiune cu polul O și putere k^2. Deci avem pe $|OA$, $|OB$ și $|OC$ punctele A', B', respectiv C' astfel încît (1) $\|OA\| \, \|OA'\| = \|OB\| \, \|OB'\| = \|OC\| \cdot \|OC'\| = k^2$. Dacă notăm cu H' proiecția lui O pe planul $(A'B'C')$ se constată că centrul sferei circumscrise lui $[OABC]$ este situat pe $|OH'$ și rezultă $2R\|H'O\| = k^2$ (2). Lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$ se pot calcula în funcție de $a = \|OA\|$, $b = \|OB\|$, $c = \|OC\|$ și k, așa încît putem calcula aria S' a triunghiului $A'B'C'$ prin formula lui *Heron*. Se obține (3) $S' = \dfrac{k^4 u^2 S}{a^2 b^2 c^2}$,

Scanned with OKEN Scanner

unde u este lungimea laturii triunghiului ABC. Pe de altă parte volumul V' al tetraedrului $[OA'B'C']$ este dat de relația (4) $3V' = \| H'O \| S'$ și mai avem (5) $\frac{V'}{V} = \frac{\| OA' \| \cdot \| OB' \| \cdot \| OC' \|}{\| OA \| \cdot \| OB \| \cdot \| OC \|}$. În sfîrșit să mai observăm că triunghiul ABC fiind situat pe sfera de rază R avem (6) $u \leqslant R\sqrt{3}$. Din relațiile (1) — (6) obținem inegalitatea cerută.

(Stere Ianuș, G.M. 9/1981)

67. 1) Punctele A, M, N determină cercul de centru O_1 și diametru $|AA'|$. Dacă M coincide cu A' atunci P coincide cu N și PQ este perpendiculară pe O_1A. Analog cazul $N = A'$. Pentru $M \neq A'$ avem $\widehat{AQP} \equiv \widehat{MNP} \equiv \widehat{MAT}$ (T se află pe tangenta la cerc în punctul A, în semiplanul în care se află M, semiplan mărginit de O_1A). Rezultă $PQ \| AT$ și deci dreapta PQ rămîne paralelă cu planul tangent sferei în punctul A.

2) Considerăm cazul în care punctele M și N se deplasează pe cercul cu centrul în O_1 și de rază $r (M \neq A')$. Dreapta PQ devine exterioară cercului în cazul în care $m(\widehat{MAN}) > 90$. Pentru o poziție dată a punctului M, $\| O_1E \|$ este maximă cînd N este punct de tangență al cercului cu o dreaptă perpendiculară pe AM astfel încît $m(\widehat{MAN}) > 90$. Fie S mijlocul segmentului $|AM|$. Notăm $m(\widehat{AO_1S}) = \varphi$, $\varphi \in (0,90)$. Avem $\| O_1S \| = r \cos \varphi$, $\| SA \| = r \sin \varphi$, $\| AQ \| = r(1 - \sin \varphi)$, $\| AE \| = \| AQ \| \cos \widehat{EAQ} = r \sin \varphi (1 - \sin \varphi)$. Cum $\sin \varphi + 1 - \sin \varphi = \text{const.}$, rezultă că $\| AE \|$ are valoarea maximă dacă $\sin \varphi = 1 - \sin \varphi$, deci $\varphi = 30$. Avem $m(\widehat{OA_1M}) = 60$ și $m(\widehat{MO_1N}) = 120$. Obținem $\| AE \|_{max} = r/4$ și $\| O_1E \|_{max} = 5r/4$.

Dar $\| OE \| = \sqrt{\| O_1E \|^2 + \| O_1O \|^2} = \sqrt{R^2 + \frac{9r^2}{16}}$.

Rezultă că $\| OE \|$ ia valoarea maximă $\frac{5R}{4}$ atunci cînd punctele M și N se află pe un cerc mare al sferei ce conține punctul A, astfel încît $m(\widehat{MAO}) = m(\widehat{NAO}) = 60$.

(D. Petre, G.M. 3/1975)

68. Fie $|SK|$ apotema fetei $[ASD]$, $|SH|$ înălțimea piramidei și $\{L\} = BC \cap HK$. Rezultă că $|SL|$ este apotemă a fetei $[BSC]$ și $m(\widehat{SLK}) = m(\widehat{SKL}) = \alpha$. O se află pe dreapta de intersecție a planelor bisectoare ale

Scanned with OKEN Scanner

unghiurilor diedre formate de fețele $[BSC]$ și $[ASD]$, $[ASB]$ și $[CSD]$, care coincide cu înălțimea SH a piramidei $[SABCD]$. Avem $v[SALBK] = v[SDCLK]$ deoarece aceste piramide au înălțimea $|SH|$ comună, iar trapezele $ABLK$ și $DCLK$ sînt congruente. Analog, $v[PABLK] = v[PDCLK]$, $v[PASK] = v[PSDK]$, $v[PBSL] = v[PCSL]$ pentru orice punct P din planul (LSK), de unde rezultă că $v[SABP] = v[SDCP]$ și deci $\triangle ABS \equiv \triangle DCS$ (L.L.L.). Rezultă că (LSK) este plan bisector alunghiului diedru format de fețele $[ASB]$ și $[CSD]$ și deci $|SH \subset (LSK)$. Prin urmare $O \in SH$.

Avem $\|LK\| = a \sin \varphi$ și $m(\widehat{OKH}) = \frac{\alpha}{2}$. Rezultă că $r = \|KH\| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

[1] *Bernic V. I., Juc I. K., Melnicov O. V., Sbornic olimpiadnîh zadaci po matematike*, Minsk, 1980.

[2] *Brezuleanu A., Galbură Gh., Popovici I., Soare N., Turtoi A., Elemente de geometrie euclidiană plană*, Universitatea din Bucureşti, 1981.

[3] *Buicliu G., Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1957.

[4] *Chiţei G. A., Metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

[5] *Constantin L., Dădîrlad M., Jecan E., Poka S., Varna D., Vasiu A., Probleme rezolvate din manualul de geometrie cls. X*, fasc. I, Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj Napoca, 1980.

[6] *Coţa A., Radò M., Răduţiu M., Vornicescu F., Geometrie şi trigonometrie, Manual cl. IX-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981.

[7] *Coţa A., Kürthy E., Popa E., Radò M., Răduţiu M., Vornicescu F., Geometrie şi trigonometrie, Manual cl. X-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică 1982.

[8] *Downs F. L., Moise E. E., Geometrie*, Ediţie în limba rusă, Moskva, 1972.

[9] *Dubnov I. S., Osibki v gheometriceskih dokazatelstvah*, Moskva, Nauka, 1969.

[10] *F. G. M., Questions de la Géometrie*, Paris, J. de Gigord, Tours Alfred Mume et Fils, 1918.

[11] *Gerasimova I. S., Gusev V. A., Maslova G. G, Sbornic zadaci po gheometrii dlja 9—10 classov*, Moskva, Ed. tehnică, 1977

[12] *Hadamard J., Lecţii de geometrie elementară — geometrie plană*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.

[13] *Haimovici A., Cruceanu V., Miron R., Vamanu E., Maxim L., Lecţii de geometrie elementară*, Univ. Alex. I Cuza, Iaşi, 1975.

[14] *Huschitt M., Ioanoviciu A., Mihăileanu N., Neumann M., Stanciu L., Stanciu P., Vişa E. Culegere de probleme de geometrie sintetică şi proiectivă*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[15] *Iaglom I. M., Kompleksntie cisa i ih primenenie v gheometrii*, Moskva, Fizmatghiz, 1963.

Scanned with OKEN Scanner

[16] *Kutasov A. D., Pigolkina T. S., Cehlov V. I. Iakovleva T. H., Posobie po matematike dlja postupaiuscih v vuzi*, Moskva, 1981.
[17] *Lidsky V., Ovsyannikov L., Tulaikov A., Shanu nin M., Problems in elementary mathematics*, Moscow, Mir Publishers, 1973.
[18] *Mihăileanu N., Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.
[19] *Mihalescu C., Geometria elementelor remarcabile*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.
[20] *Miron R., Geometrie elementară*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
[21] *Pimsner M., Popa S., Probleme de geometrie elementară*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
[22] *Simionescu Gh., Probleme de sinteză de geometrie plană şi în spaţiu*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1978.
[23] *Turtoiu F., Ecuaţii şi inecuaţii trigonometrice*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1979.
[24] *Teleman K., Florescu M., Moraru D., Rădulescu C., Stătescu E., Geometrie şi trigonometrie Manual clasa a IX-a* (1978), *cl X* (1979), Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.
[25] *Ţiţeica Gh., Culegere de probleme de geometrie*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1981.
[26] Colecţia *„Gazeta Matematică" (G.M.)*.
[27] *„Revista Matematică a elevilor din Timişoara" (R.M.T.)*.

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

PARTEA ÎNTÎI

Enunțuri

Cap. I. Probleme de incidență, ordonare și congruență în plan 5
Cap. II. Paralelism. Asemănare 14
Cap. III. Cercul 28
Cap. IV. Elemente de geometrie analitică 48
Cap. V. Funcții trigonometrice 50
Cap. VI. Ecuații și inecuații trigonometrice 60
Cap. VII. Ariile suprafețelor plane 66
Cap. VIII. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 72
Cap. IX. Aplicații ale trigonometriei în algebră. Numere complexe sub formă trigonometrică 76
Cap. X. Incidență, ordonare, congruență și paralelism în spațiu 80
Cap. XI. Poliedre 85
Cap. XII. Corpuri rotunde 91

PARTEA A DOUA

Soluții, indicații, răspunsuri

Cap. I. Probleme de incidență, ordonare și congruență în plan 98
Cap. II. Paralelism, Asemănare 119
Cap. III. Cercul 141
Cap. IV. Elemente de geometrie analitică 182
Cap. V. Funcții trigonometrice 184
Cap. VI. Ecuații și inecuații trigonometrice 196
Cap. VII. Ariile suprafețelor plane 212
Cap. VIII. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 227
Cap. IX. Aplicații ale trigonometriei în algebră. Numere complexe sub formă trigonometrică 233
Cap. X. Incidență, ordonare, congruență și paralelism în spațiu 237
Cap. XI. Poliedre 251
Cap. XII. Corpuri rotunde 270

Scanned with OKEN Scanner

Nr. colilor de tipar : 18
Bun de tipar : 24.01.1983

Com. nr. 20 669/7 207
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București R.S.R.

Scanned with OKEN Scanner

Au apărut :

IOAN TOMESCU,	Probleme de combinatorică și teoria grafurilor
S. RĂDULESCU, M. RĂDULESCU	Teoreme și probleme de analiză matematică
C. MIHU, T. DĂNEȚ	Probleme pentru aplicarea matematicii în practică
C. NĂSTĂSESCU, C. NIȚĂ, M. BRANDIBURU, D. JOIȚA	Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX–XII

În curs de apariție

* * *	Probleme de matematică traduse din revista sovietică KVANT
E. E. MOISE F. L. DOWNS JR.	Geometrie elementară, manualul elevului (traducere din limba engleză)
M. M. POSTNIKOV	Despre teorema lui Fermat (traducere din limba rusă)

Scanned with OKEN Scanner